

● Учебник

МАТЕМАТИКА

Рекомендован ФГАУ «Федеральный институт развития образования» в качестве учебника для использования в учебном процессе образовательных организаций, реализующих программы среднего профессионального образования по специальностям 31.02.01 «Лечебное дело», 31.02.02 «Акушерское дело», 34.02.01 «Сестринское дело», 31.02.05 «Стоматология ортопедическая», 31.02.06 «Стоматология профилактическая», 33.02.01 «Фармация», 31.02.03 «Лабораторная диагностика», 32.02.01 «Медико-профилактическое дело», 31.02.04 «Медицинская оптика»

Москва

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

«ГЭОТАР-Медиа»

2017

ГЛАВА 1



ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Одним из основных понятий математики является понятие множества. Под *множеством* понимается совокупность предметов, объединенных общим для них свойством. Примером множества является группа студентов первого курса, лекарства, относящиеся к антибиотикам, книги по данной специальности, граждане одной национальности и т. п. Каждый объект множества называется его *элементом* и обозначается малыми буквами латинского алфавита $a, b, c, \dots, x, y, z$, а множества элементов — большими буквами $A, B, C, \dots, X, Y, Z$. Если некоторый объект x является элементом множества X , пишут $x \in X$.

Определение

Множество X называется подмножеством множества Y , если каждый элемент множества X является элементом множества Y .

Например, препараты, относящиеся к антидепрессантам, являются подмножеством психотропных средств.

Множества, состоящие из чисел, называются *числовыми*.

Целые положительные числа называются *натуральными*. Они обозначаются буквой N . Натуральные числа, а также целые отрицательные числа и ноль, взятые вместе, образуют множество *целых* чисел. Обозначаются буквой Z . Целые, положительные и отрицательные, ноль, а также дробные числа составляют множество *рациональных* чисел Q . Причем дробные числа записываются в виде конечной десятичной или бесконечной десятичной периодической дроби. Бесконечные десятичные непериодические дроби относятся к множеству *иррациональных*

чисел. Множества рациональных и иррациональных чисел образуют множество *действительных* чисел $\mathbf{R}$.

Между действительными числами и числовой осью имеется взаимно однозначное соответствие.

Определение

Числовой осью называется прямая, на которой выбрано начало отсчета 0, направление и масштаб.

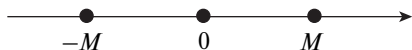


Рис. 1.1. Числовая ось

Каждому действительному числу a на числовой оси соответствует точка M с координатой a . Причем положительные числа находятся

справа от начала координат, отрицательные — слева, а при $a = 0$ точка M совпадает с началом координат (рис. 1.1).

Действительные числа могут образовывать подмножества, которые называются *интервалами*:

- *открытый интервал*, если $a < x < b$, обозначается (a, b) ;
- *замкнутый интервал* (или отрезок), если $a \leq x \leq b$, обозначается $[a, b]$;
- *полуоткрытый интервал*, если $a \leq x < b$, обозначается $[a, b)$, или если $a < x \leq b$, обозначается $(a, b]$;
- *бесконечные интервалы*:
 - если $-\infty < x < +\infty$, обозначается $(-\infty, +\infty)$;
 - если $a < x < +\infty$, обозначается $(a, +\infty)$;
 - если $a \leq x < +\infty$, обозначается $[a, +\infty)$;
 - если $-\infty < x < b$, обозначается $(-\infty, b)$;
 - если $-\infty < x \leq b$, обозначается $(-\infty, b]$.

Определение

Абсолютным значением действительного числа a называется величина, равная

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например: $|6,3| = 6,3$; $|-2,7| = 2,7$.

Укажем основные свойства абсолютных величин:

- $a \leq |a|$;
- неравенство $|a| < |b|$ соответствует двум неравенствам $-b < a < b$;
- неравенство $|a| \leq |b|$ соответствует двум неравенствам $-b \leq a \leq b$.

1.2. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.2.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

В математике вводится понятие переменных и постоянных величин.

Постоянные величины при заданных условиях принимают одно и то же значение. *Постоянные величины* обозначаются начальными буквами латинского алфавита $a, b, c, \dots$ Переменные величины в данных условиях могут принимать множество различных числовых значений из некоторого множества. Множество значений, которые принимает переменная величина, называют *областью определения*. *Переменные величины* обычно обозначают последними буквами латинского алфавита x, y, z . Причем значения переменных величин записывают строчными буквами, например x , а множество возможных значений этой переменной обозначают прописной буквой X . Тогда запись $x \in X$ говорит, что значение x принадлежит множеству возможных значений величины X .

Например, если X — множество четных чисел, тогда $x = 4$ относится к множеству X .

Если между переменными величинами x и y имеется однозначное соответствие, то говорят, что между ними существует функциональная взаимосвязь.

Например, длина окружности однозначно зависит от величины радиуса: $C = 2\pi R$.

Определение

Переменная величина y называется *функцией* (или зависимой переменной) переменной величины x , называемой *аргументом*, или независимой переменной, если каждому допустимому значению x соответствует определенное и единственное значение y .

Функциональная зависимость обозначается некоторым символом, например f , и записывается $y = f(x)$. Используются и другие обозначения функции: $y = \varphi(x)$; $y = F(x)$ и т. п. Множество значений Y , которое принимает функция, называется *областью значений функции*.

Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно y , то такая функция называется *неявной*: $F(x, y) = 0$. Решение уравнения относительно y дает ту же функцию, но уже в явном виде: $y = \varphi(x)$.

1.2.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

Функция считается *заданной*, если задано множество значений, принимаемых независимой переменной, и задано правило, устанавливающее соответствие между значениями аргумента и зависимой переменной.

Наиболее часто используются следующие способы задания функции.

1. Аналитический. В этом случае правило соответствия задается в виде формулы.

Например, площадь круга S есть функция ее радиуса R : $S = \pi R^2$, где $0 < R < +\infty$.

Иногда для задания функции используют несколько формул.

Например:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 0; \\ 2x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Следует отметить, что аналитическим заданием функции указывается и область определения. Если область определения не задана, то определяются значения аргумента, при которых данная функция имеет смысл.

2. Табличный. Этот способ наиболее часто используется при проведении экспериментальных исследований. При этом данные заносятся в таблицу, состоящую из двух строк (или столбцов). В одну из них заносят значения аргумента, то есть x , а в другую — значения $f(x)$, соответствующие x .

Например, изменение температуры пациента во времени, представленное в табл. 1.1, показывает результаты проводимого лечения.

Таблица 1.1. Изменение температуры пациента

Дни	1	2	3	4	5	6	7
$t, ^\circ\text{C}$	39	39	38,5	38	37,5	37	36,7

3. Графический. Этот способ представляет запись изменения различных величин, например, от времени. В медицине используется большое количество различных электрограмм, которые отражают изменение во времени электрических процессов живого организма.

Например, к графическим способам задания функции относятся записи электрокардиограмм, электроэнцефалограмм, электромиограмм и т. п. На рис. 1.2 представлена запись биоэлектрической активности сердца — электрокардиограмма.

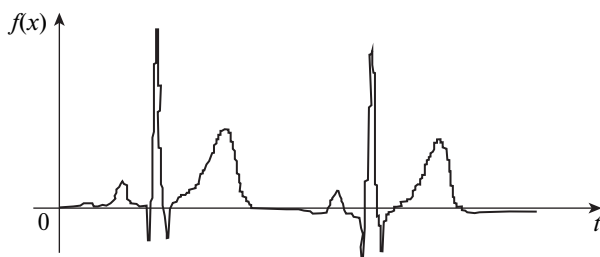


Рис. 1.2. Графический способ записи функции

Указанные три способа задания функций являются не единственными, так как имеются и другие способы, например, словесное описание изменения состояния пациента в процессе лечения.

1.2.3. НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Область определения функции зависит от возможных значений, которые может принимать независимая величина. Если речь идет об абстрактных математических величинах, то они могут принимать мыслимые значения, то есть находиться в интервале $(-\infty, +\infty)$, что означает $-\infty < x < +\infty$. Однако при нахождении области определения функции, заданной аналитическим путем, независимая переменная принимает те значения, при которых функция существует. При этом следует учитывать, что:

- дробь имеет смысл, если знаменатель отличен от нуля;
- корень четной степени существует, если подкоренное выражение неотрицательно;
- корень нечетной степени существует при любом значении подкоренного выражения;
- функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена на множестве всех действительных чисел, то есть $-\infty < x < +\infty$;
- логарифмы отрицательных чисел не существуют;
- областью определения функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arctg x$ является множество всех действительных чисел, то есть $-\infty < x < +\infty$;
- функция $y = \tg x$ определена, если $x \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$;
- функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены, если $-1 \leq x \leq 1$.

Для нахождения области значений функции необходимо подставить значения аргумента в аналитическую формулу и определить границы, в которых находятся изменения зависимой переменной.