

- Учебник

МАТЕМАТИКА

Рекомендован ФАУ «Федеральный институт развития образования»
в качестве учебника для использования в учебном процессе
образовательных организаций, реализующих программы среднего
профессионального образования по специальностям

Москва
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
«ГЭОТАР-Медиа»
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Список сокращений	9
Введение	10

ЧАСТЬ I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава 1. Функции. Предел функции	17
1.1. Числовые множества	17
1.2. Функция одной переменной	19
1.2.1. Понятие функции	19
1.2.2. Способы задания функций	20
1.2.3. Нахождение области определения и области значений функции . . .	21
1.2.4. Обратная функция	22
1.2.5. Четные и нечетные функции	24
1.2.6. Периодические функции	24
1.2.7. Возрастающие и убывающие функции	25
1.3. Простейшие элементарные функции	26
1.3.1. Линейная функция	26
1.3.2. Степенная функция	27
1.3.3. Показательная функция	28
1.3.4. Логарифмическая функция	28
1.3.5. Тригонометрические функции	29
1.3.6. Обратные тригонометрические функции	30
1.4. Построение графиков функций	32
1.5. Предел функции	35
1.6. Теоремы о пределах функций	37
1.7. Понятие непрерывности функции. Точки разрыва	40
1.8. Свойства непрерывных функций	43
1.9. Задачи для самостоятельного решения	45
Глава 2. Дифференциальное исчисление	48
2.1. Производная функции. Геометрический и механический смысл производной	48
2.2. Правила нахождения производных функций	51
2.3. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала . . .	54
2.4. Применение производной при исследовании функций и построении графиков	56
2.5. Функции нескольких переменных. Частные производные	63
2.5.1. Частные производные первого порядка	65
2.6. Задачи для самостоятельного решения	66
Глава 3. Интегральное исчисление	69
3.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл	69
3.2. Основные свойства неопределенного интеграла	70

3.3. Основные методы интегрирования	71
3.3.1. Метод непосредственного интегрирования	71
3.3.2. Интегрирование методом замены переменной	71
3.3.3. Интегрирование по частям	72
3.3.4. Интегрирование рациональных функций	74
3.4. Определенный интеграл	75
3.4.1. Свойства определенного интеграла	76
3.4.2. Формула Ньютона—Лейбница	77
3.4.3. Вычисление определенных интегралов различными методами	78
3.4.4. Применение определенного интеграла к вычислению различных величин	80
3.5. Задачи для самостоятельного решения	83
Глава 4. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике	85
4.1. Основные понятия и определения дифференциального уравнения	85
4.2. Методы решения некоторых дифференциальных уравнений	87
4.2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными	87
4.2.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	89
4.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	90
4.4. Применение дифференциальных уравнений первого порядка для решения задач	92
4.5. Задачи для самостоятельного решения	95
ЧАСТЬ II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ	
Глава 5. Предел последовательности	99
5.1. Числовая последовательность	99
5.2. Предел последовательности	100
5.3. Задачи для самостоятельного решения	103
Глава 6. Ряды	104
6.1. Числовые ряды	104
6.2. Сходимость и расходимость числовых рядов	105
6.3. Признаки сходимости рядов с положительными членами	108
6.4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена	111
6.5. Задачи для самостоятельного решения	115
ЧАСТЬ III. ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ	
Глава 7. Множества	119
7.1. Элементы и множества	119
7.2. Основные понятия	119
7.3. Операции над множествами	121
7.4. Свойства операций над множествами	129
7.5. Задачи для самостоятельного решения	131

Глава 8. Графы	132
8.1. История теории графов	132
8.2. Основные определения	134
8.3. Маршруты, цепи, циклы	141
8.4. Деревья	149
8.5. Операции над графами	154
8.6. Задачи для самостоятельного решения	155

ЧАСТЬ IV. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава 9. Основы теории вероятностей	159
9.1. Основные понятия комбинаторики	159
9.2. Случайные события и операции над ними	161
9.2.1. Случайные события	161
9.2.2. Операции над событиями	164
9.2.3. Вероятность события	166
9.2.4. Теорема сложения вероятностей	168
9.2.5. Теорема умножения вероятностей	170
9.2.6. Формула полной вероятности	172
9.3. Случайные величины	173
9.3.1. Распределение дискретных и непрерывных случайных величин ..	174
9.3.2. Числовые характеристики случайных величин	179
9.3.3. Нормальный закон распределения	183
9.3.4. Закон больших чисел	185
9.4. Задачи для самостоятельного решения	186
Глава 10. Основы математической статистики	192
10.1. Задачи математической статистики	192
10.2. Генеральная совокупность и выборка	193
10.3. Статистическое распределение (вариационный ряд). Гистограмма. Полигон	194
10.4. Характеристики положения и рассеяния статистического распределения	197
10.5. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке.	198
10.6. Интервальная оценка. Доверительный интервал и доверительная вероятность	202
10.7. Задачи для самостоятельного решения	204
Глава 11. Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении	207
11.1. Медицинская статистика — отрасль статистической науки	207
11.2. Этапы медико-статистического исследования	208
11.3. Анализ медико-демографических показателей	215
11.4. Применение статистических показателей для оценки деятельности поликлиники и стационара	221
11.4.1. Показатели работы поликлиники	221
11.4.2. Основные показатели работы стационара	222
11.5. Задачи для самостоятельного решения	223

ЧАСТЬ V. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СРЕДНЕГО МЕДИЦИНСКОГО РАБОТНИКА

Глава 12. Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала	227
12.1. Определение процента. Составление и решение пропорций	227
12.2. Расчет процентной концентрации растворов	229
12.3. Жизненная емкость легких	232
12.4. Показатели сердечной деятельности	235
12.5. Оценка физического развития детей	238
12.6. Способы расчета питания грудных детей	244
12.7. Задачи для самостоятельного решения	246
Глава 13. Прикладные задачи в области профессиональной деятельности	248
13.1. Решение задач профессиональной направленности	248
13.2. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплин «Сестринский уход в педиатрии», «Диагностика в педиатрии», «Лечение пациентов детского возраста»	250
13.3. Антропометрические индексы	252
13.4. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплин «Сестринский уход в акушерстве и гинекологии», «Диагностика в акушерстве и гинекологии», «Оказание акушерско-гинекологической помощи»	253
13.5. Математические вычисления, используемые при изучении модуля «Выполнение работ по профессии младшая медицинская сестра по уходу за больными»	254
13.5.1. Цена деления шприца	254
13.5.2. Разведение растворов	255
13.5.3. Расчет водного баланса	258
13.5.4. Разведение антибиотиков	259
13.6. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплины «Фармакология»	261
13.6.1. Методы изготовления жидких лекарственных форм и способы выражения концентрации	261
13.7. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплины «Основы реаниматологии, дифференциальной диагностики и оказания неотложной медицинской помощи на догоспитальном этапе»	262
13.8. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплин «Сестринский уход при различных заболеваниях и состояниях», «Сестринский уход в терапии», «Лечение пациентов терапевтического профиля»	264
13.9. Задачи для самостоятельного решения	267
Ответы	277
Список литературы	293
Приложение	295
Предметный указатель	296

ГЛАВА 1



ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Одним из основных понятий математики является понятие множества. Под *множеством* понимается совокупность предметов, объединенных общим для них свойством. Примером множества является группа студентов первого курса, лекарства, относящиеся к антибиотикам, книги по данной специальности, граждане одной национальности и т. п. Каждый объект множества называется его *элементом* и обозначается малыми буквами латинского алфавита $a, b, c, \dots, x, y, z$, а множества элементов — большими буквами $A, B, C, \dots, X, Y, Z$. Если некоторый объект x является элементом множества X , пишут $x \in X$.

Определение

Множество X называется подмножеством множества Y , если каждый элемент множества X является элементом множества Y .

Например, препараты, относящиеся к антидепрессантам, являются подмножеством психотропных средств.

Множества, состоящие из чисел, называются *числовыми*.

Целые положительные числа называются *натуральными*. Они обозначаются буквой N . Натуральные числа, а также целые отрицательные числа и ноль, взятые вместе, образуют множество *целых* чисел. Обозначаются буквой Z . Целые, положительные и отрицательные, ноль, а также дробные числа составляют множество *рациональных* чисел Q . Причем дробные числа записываются в виде конечной десятичной или бесконечной десятичной периодической дроби. Бесконечные десятичные непериодические дроби относятся к множеству *иррациональных*

чисел. Множества рациональных и иррациональных чисел образуют множество *действительных* чисел $\mathbf{R}$.

Между действительными числами и числовой осью имеется взаимно однозначное соответствие.

Определение

Числовой осью называется прямая, на которой выбрано начало отсчета 0, направление и масштаб.



Рис. 1.1. Числовая ось

Каждому действительному числу a на числовой оси соответствует точка M с координатой a . Причем положительные числа находятся

справа от начала координат, отрицательные — слева, а при $a = 0$ точка M совпадает с началом координат (рис. 1.1).

Действительные числа могут образовывать подмножества, которые называются *интервалами*:

- *открытый интервал*, если $a < x < b$, обозначается (a, b) ;
- *замкнутый интервал* (или отрезок), если $a \leq x \leq b$, обозначается $[a, b]$;
- *полуоткрытый интервал*, если $a \leq x < b$, обозначается $[a, b)$, или если $a < x \leq b$, обозначается $(a, b]$;
- *бесконечные интервалы*:
 - если $-\infty < x < +\infty$, обозначается $(-\infty, +\infty)$;
 - если $a < x < +\infty$, обозначается $(a, +\infty)$;
 - если $a \leq x < +\infty$, обозначается $[a, +\infty)$;
 - если $-\infty < x < b$, обозначается $(-\infty, b)$;
 - если $-\infty < x \leq b$, обозначается $(-\infty, b]$.

Определение

Абсолютным значением действительного числа a называется величина, равная

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например: $|6,3| = 6,3$; $|-2,7| = 2,7$.

Укажем основные свойства абсолютных величин:

- $a \leq |a|$;
- неравенство $|a| < |b|$ соответствует двум неравенствам $-b < a < b$;
- неравенство $|a| \leq |b|$ соответствует двум неравенствам $-b \leq a \leq b$.

1.2. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.2.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

В математике вводится понятие переменных и постоянных величин.

Постоянные величины при заданных условиях принимают одно и то же значение. *Постоянные величины* обозначаются начальными буквами латинского алфавита $a, b, c, \dots$ Переменные величины в данных условиях могут принимать множество различных числовых значений из некоторого множества. Множество значений, которые принимает переменная величина, называют *областью определения*. *Переменные величины* обычно обозначают последними буквами латинского алфавита x, y, z . Причем значения переменных величин записывают строчными буквами, например x , а множество возможных значений этой переменной обозначают прописной буквой X . Тогда запись $x \in X$ говорит, что значение x принадлежит множеству возможных значений величины X .

Например, если X — множество четных чисел, тогда $x = 4$ относится к множеству X .

Если между переменными величинами x и y имеется однозначное соответствие, то говорят, что между ними существует функциональная взаимосвязь.

Например, длина окружности однозначно зависит от величины радиуса: $C = 2\pi R$.

Определение

Переменная величина y называется *функцией* (или зависимой переменной) переменной величины x , называемой *аргументом*, или независимой переменной, если каждому допустимому значению x соответствует определенное и единственное значение y .

Функциональная зависимость обозначается некоторым символом, например f , и записывается $y = f(x)$. Используются и другие обозначения функции: $y = \varphi(x)$; $y = F(x)$ и т. п. Множество значений Y , которое принимает функция, называется *областью значений функции*.

Если уравнение, с помощью которого задается функция, не решено относительно y , то такая функция называется *неявной*: $F(x, y) = 0$. Решение уравнения относительно y дает ту же функцию, но уже в явном виде: $y = \varphi(x)$.

1.2.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

Функция считается *заданной*, если задано множество значений, принимаемых независимой переменной, и задано правило, устанавливающее соответствие между значениями аргумента и зависимой переменной.

Наиболее часто используются следующие способы задания функции.

1. Аналитический. В этом случае правило соответствия задается в виде формулы.

Например, площадь круга S есть функция ее радиуса R : $S = \pi R^2$, где $0 < R < +\infty$.

Иногда для задания функции используют несколько формул.

Например:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 0; \\ 2x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Следует отметить, что аналитическим заданием функции указывается и область определения. Если область определения не задана, то определяются значения аргумента, при которых данная функция имеет смысл.

2. Табличный. Этот способ наиболее часто используется при проведении экспериментальных исследований. При этом данные заносятся в таблицу, состоящую из двух строк (или столбцов). В одну из них заносят значения аргумента, то есть x , а в другую — значения $f(x)$, соответствующие x .

Например, изменение температуры пациента во времени, представленное в табл. 1.1, показывает результаты проводимого лечения.

Таблица 1.1. Изменение температуры пациента

Дни	1	2	3	4	5	6	7
$t, ^\circ\text{C}$	39	39	38,5	38	37,5	37	36,7

3. Графический. Этот способ представляет запись изменения различных величин, например, от времени. В медицине используется большое количество различных электрограмм, которые отражают изменение во времени электрических процессов живого организма.

Например, к графическим способам задания функции относятся записи электрокардиограмм, электроэнцефалограмм, электромиограмм и т. п. На рис. 1.2 представлена запись биоэлектрической активности сердца — электрокардиограмма.

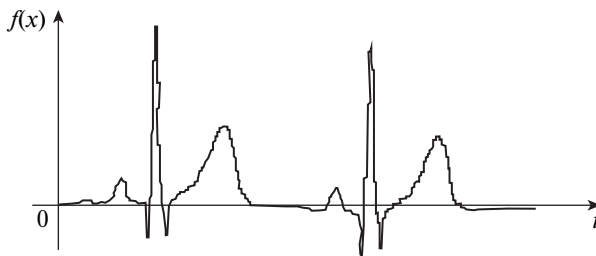


Рис. 1.2. Графический способ записи функции

Указанные три способа задания функций являются не единственными, так как имеются и другие способы, например, словесное описание изменения состояния пациента в процессе лечения.

1.2.3. НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Область определения функции зависит от возможных значений, которые может принимать независимая величина. Если речь идет об абстрактных математических величинах, то они могут принимать мыслимые значения, то есть находиться в интервале $(-\infty, +\infty)$, что означает $-\infty < x < +\infty$. Однако при нахождении области определения функции, заданной аналитическим путем, независимая переменная принимает те значения, при которых функция существует. При этом следует учитывать, что:

- дробь имеет смысл, если знаменатель отличен от нуля;
- корень четной степени существует, если подкоренное выражение неотрицательно;
- корень нечетной степени существует при любом значении подкоренного выражения;
- функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена на множестве всех действительных чисел, то есть $-\infty < x < +\infty$;
- логарифмы отрицательных чисел не существуют;
- областью определения функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ является множество всех действительных чисел, то есть $-\infty < x < +\infty$;
- функция $y = \operatorname{tg} x$ определена, если $x \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$;
- функции $y = \operatorname{arcsin} x$ и $y = \operatorname{arccos} x$ определены, если $-1 \leq x \leq 1$.

Для нахождения области значений функции необходимо подставить значения аргумента в аналитическую формулу и определить границы, в которых находятся изменения зависимой переменной.

Рассмотрим примеры нахождения области определения и области значений функции.

Пример 1.1. Дана функция $y = x^2$.

Решение. Независимая переменная x может принимать все действительные значения, то есть $-\infty < x < +\infty$. При этом y изменяется в пределах $0 \leq y < +\infty$. $\triangleleft$

Пример 1.2. Дана функция $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение. Подкоренное выражение должно быть: $1 - x^2 \geq 0$. Следовательно, $x^2 \leq 1$, тогда $|x| \leq 1$. Область определения: $-1 \leq x \leq 1$. При этих значениях y изменяется в пределах $0 \leq y \leq 1$. $\triangleleft$

Пример 1.3. Дана функция $y = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

Решение. В данном случае необходимо, чтобы подкоренное выражение было больше нуля, так как на ноль делить нельзя.

$$1 - 4x^2 > 0; \quad x^2 < \frac{1}{4}; \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Область определения функции: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Область значений: $1 \leq y < +\infty$. $\triangleleft$

Пример 1.4. Дана функция $y = \lg\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Решение. Выражение под знаком логарифма должно быть больше нуля; кроме того, $x \neq 0$, то есть

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} > 0; \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда $1 > \frac{1}{x^2}$, $x^2 > 1$, $|x| > 1$. Область определения функции: $-1 < x < 1$. Область значений: $-\infty < y < +\infty$. $\triangleleft$

1.2.4. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная в некоторой области. Решим обратную задачу, то есть для некоторого значения y_0 найдем соответствующее ему одно или несколько значений аргумента x_0 . Для этих значений функция будет равна y_0 , то есть $y_0 = f(x_0)$. Таким образом,

если каждому значению y из множества значений функции $y = f(x)$ ставится в соответствие одно или несколько значений x из области определения функции, то такая зависимость называется *обратной функцией* и обозначается $x = Y(y)$. Областью определения обратной функции является область значений данной функции.

Например, дана функция $y = 2x$, область определения которой — все действительные числа, то есть $-\infty < y < +\infty$; область значений — также $-\infty < x < +\infty$. Для любого значения y имеется одно значение x , равное

$x = \frac{1}{2}y$. Следовательно, функция

$x = \frac{1}{2}y$ есть однозначная обратная функция для функции $y = 2x$. Область определения обратной функции: $-\infty < x < +\infty$, область значений: $-\infty < y < +\infty$. Рассмотрим графики прямой и обратной функций. График функции $y = 2x$ представлен на рис. 1.3. При $x = 0$ значение $y = 0$, а при $x = 1$ значение $y = 2$.

Для графика обратной функции

$x = \frac{1}{2}y$ также найдем две точки. При $x = 0$ значение $y = 0$, а при $x = 1$ значение $y = 2$. Следовательно, графики прямой и обратной функций будут совпадать. Однако если обозначить, как принято, значения аргумента через x , а значения функции через y , то есть $y = F(x)$, то обратная функция будет иметь вид $y = \frac{1}{2}x$. График этой функции будет симметричен графику прямой функции $y = 2x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Например, дана функция $y = x^3$, область определения которой — все действительные числа, то есть $-\infty < x < +\infty$. Область значений

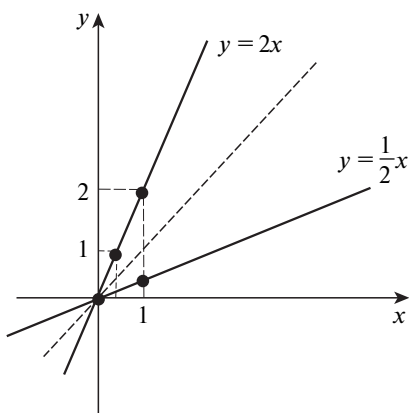


Рис. 1.3. Графики прямой функции $y = 2x$ и обратной функции $y = \frac{1}{2}x$

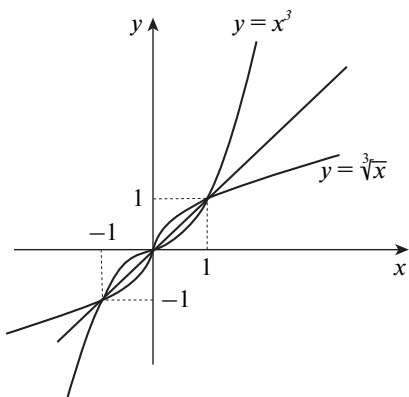


Рис. 1.4. Графики прямой функции $y = x^3$ и обратной функции $y = \sqrt[3]{x}$

$-\infty < y < +\infty$. Для любого значения y существует одно значение x такое, что $x = \sqrt[3]{y}$. Это говорит, что $y = \sqrt[3]{x}$ есть обратная функция для $y = x^3$. Область определения обратной функции: $-\infty < x < +\infty$, область значений: $-\infty < y < +\infty$. График обратной функции будет симметричен относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов и приведен на рис. 1.4.

1.2.5. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение

Функция $y = f(x)$, определенная на промежутке, симметричном относительно начала координат, называется *четной*, если для любого значения x из этой области определения $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $y = x^2$ является четной функцией, так как при $x = 2$ и при $x = -2$, $y = 4$.

Например, функция $y = 2x$ (см. рис. 1.3) является нечетной функцией, так как при $x = 2$ значение $y = 4$, а при $x = -2$ значение $y = -4$.

Из определения четной и нечетной функций следует, что четные функции симметричны относительно оси ординат, а нечетные — симметричны относительно начала координат. Именно поэтому при построении графиков четных функций достаточно построить их графики для положительных значений x , а затем достроить график симметрично оси ординат. Для нечетных функций график достраивается относительно начала координат.

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется *функцией общего вида*.

1.2.6. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число T , что $f(x \pm T) = f(x)$ для любого x из области определения функции.

Наименьшее положительное число T , удовлетворяющее этому условию, называется *периодом* функции.

Например, дана функция $y = \sin x$. График функции приведен на рис. 1.5. Из графика видно, что период $T = 2\pi$, так как $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Область определения функции: $-\infty < x < \infty$, область значений: $-1 \leq y \leq 1$.

Для построения периодических функций достаточно построить график одного периода, а затем последовательно сдвигать его вправо и влево по оси абсцисс на величину периода.

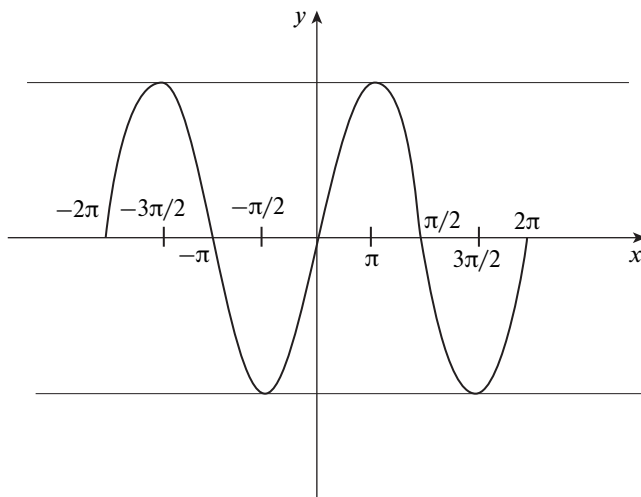


Рис. 1.5. График функции $y = \sin x$

1.2.7. ВОЗРАСТАЮЩИЕ И УБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Определение

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на интервале $(a < x < b)$, если для всех точек этого интервала при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на интервале $(a < x < b)$, если для всех точек этого интервала при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

На рис. 1.6 приведены графики возрастающей (а) и убывающей (б) функций.

Интервалы, в которых наблюдается убывание или возрастание функции, называются *интервалами монотонности*, а функции в этом интервале — *монотонными*.

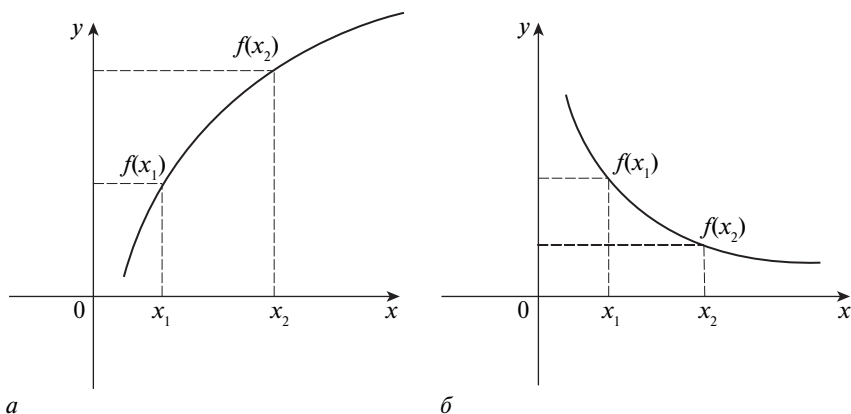


Рис. 1.6. Графики функций: a — возрастающей; b — убывающей

1.3. ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

К простейшим функциям относятся: линейная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

1.3.1. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Линейная функциональная зависимость описывается уравнением вида:

$$y = ax + b,$$

где a и b — действительные числа.

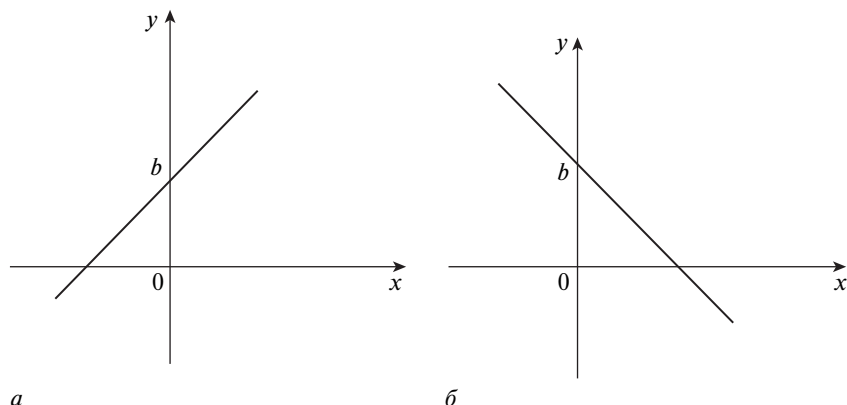


Рис. 1.7. Графики линейной функции: a — возрастающей; b — убывающей

Областью определения функции являются все действительные числа, то есть $-\infty < x < +\infty$. Область изменения: $-\infty < y < +\infty$.

График линейной функции — прямая, которая монотонно возрастает при $a > 0$, а при $a < 0$ — монотонно убывает (рис. 1.7). При $b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной, при $b = 0$ функция является нечетной.

1.3.2. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Степенная функция описывается уравнением вида:

$$y = x^n,$$

где n — любое действительное число.

При $n > 0$ область определения $-\infty < x < +\infty$, при $n < 0$ — $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$ (то есть вся числовая ось, за исключением точки $x = 0$).

На рис. 1.8, а приведен график функции $y = ax^n$, для $n = 2k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Линия, описывающая эту зависимость, называется *параболой*.

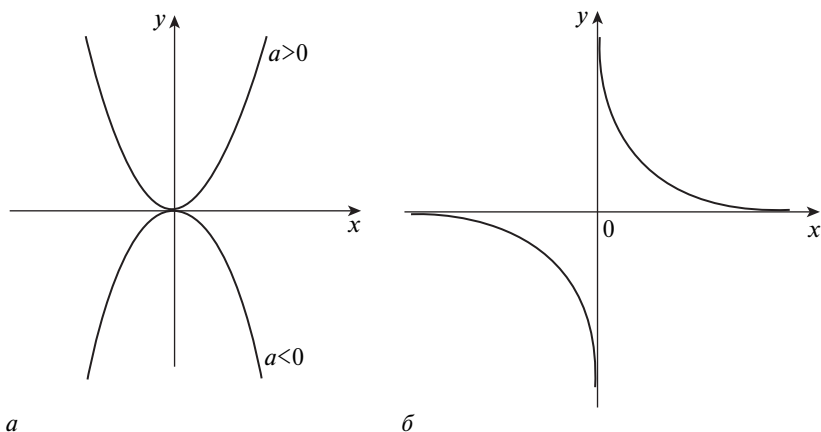


Рис. 1.8. Графики степенной функции: а — парабола; б — гипербола

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх и область значений $0 \leq y < \infty$, при $a < 0$ — вниз, а область значений $-\infty < y \leq 0$. Функция $y = ax^n$ является четной функцией.

При $n = 2k + 1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, функция $y = x^n$ является возрастающей на всей действительной оси. Функция $y = x^{2k+1}$ является нечетной.

Например, функция $y = x^3$ является степенной, и ее график представлен на рис. 1.4.

При $n < 0$ и $n = -2k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, функция $y = \frac{1}{x^n}$ является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$.

Функция $y = \frac{1}{x^{2k}}$ является четной.

При $n < 0$ и $n = -(2k - 1)$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, функция $y = \frac{1}{x^n}$ является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$. Функция является нечетной.

Линии, описывающие эту зависимость, называются *гиперболами*.

Например, график степенной функции $y = \frac{1}{x}$ приведен на рис. 1.8, б.

1.3.3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

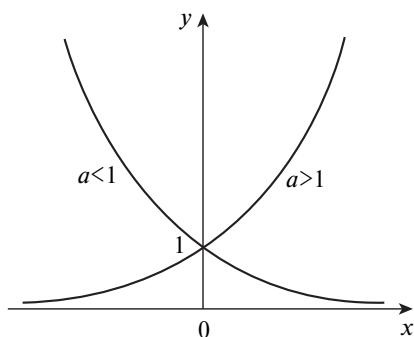


Рис. 1.9. Графики показательной функции

Показательная функция описывается уравнением вида:

$$y = a^x,$$

где $a \neq 1$, $a > 0$.

Областью определения функции являются все действительные числа, то есть $-\infty < x < +\infty$, область значений — все положительные действительные числа $0 < y < +\infty$.

График показательной функции представлен на рис. 1.9. При $a > 1$ функция возрастает при увеличении x и стремится к $+\infty$. При

$0 < a < 1$ функция убывает при увеличении x и стремится к нулю. Отметим, что графики всех показательных функций пересекают ось ординат в точке $y = 1$, так как $a^0 = 1$. Графики при $a > 1$ и $0 < a < 1$ симметричны относительно оси ординат.

При $a = e$ ($e \approx 2,71828$ — натуральное число) функция $y = e^x$ называется *экспоненциальной*, а график — *экспонентой*.

1.3.4. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Логарифмическая функция описывается уравнением

$$y = \log_a x,$$

где a — основание логарифма, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения функции — все положительные действительные числа, область значений — все действительные числа.

График логарифмической функции показан на рис. 1.10. При $a > 1$ функция возрастает с увеличением аргумента, при $0 < a < 1$ функция убывает при возрастании x .

Из определения логарифма следует, что $x = a^y$. Значит, логарифмическая функция является обратной показательной функции, и они симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Если основанием логарифмической функции является число e , то функция имеет вид $y = \ln x$ и называется *натуральной логарифмической функцией*. Логарифмическая функция с основанием 10 имеет вид $y = \lg x$ и называется *десятичной логарифмической функцией*.

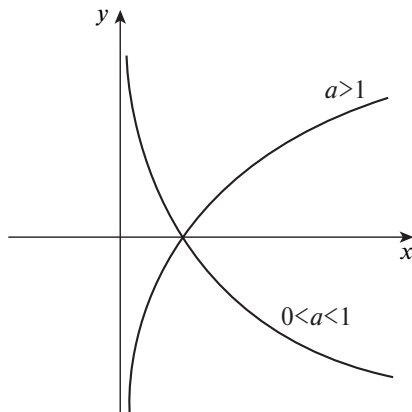


Рис. 1.10. Графики логарифмической функции

1.3.5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция $y = \cos x$ является тригонометрической, область определения $-\infty < x < \infty$, область значений $-1 \leq y \leq 1$ (рис. 1.11). Функция четная, так как $\cos(-x) = \cos x$, и периодическая с периодом $T = 2\pi$.

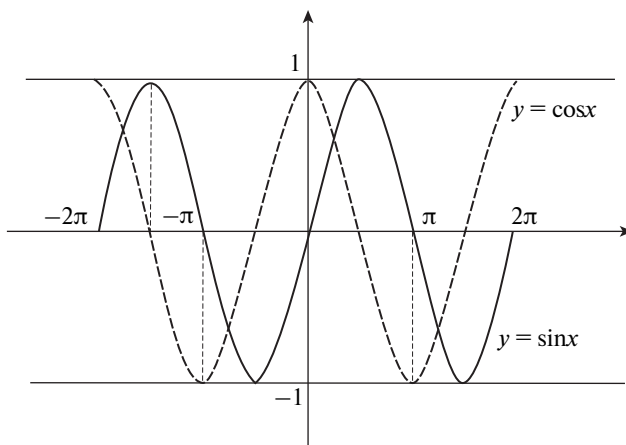


Рис. 1.11. Графики функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$

Функция $y = \sin x$ также тригонометрическая, область определения — все действительные числа, область значений $-1 \leq y \leq 1$ (см. рис. 1.11). Функция нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$, и периодическая с периодом $T = 2\pi$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ является тригонометрической. Учитывая, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, область определения — все действительные числа, за исключением тех значений, когда $\cos x = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число (рис. 1.12, а). Область значений этой функции: $-\infty < y < \infty$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечетной, так как $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, и периодической с периодом $T = \pi$.

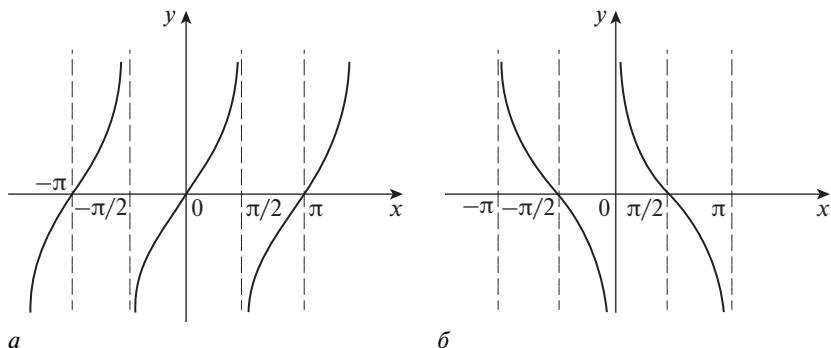


Рис. 1.12. Графики функций: а — $y = \operatorname{tg} x$; б — $y = \operatorname{ctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ также периодическая, область определения — все действительные числа, за исключением $x = \pm \pi n$, когда n — любое целое число (рис. 1.12, б). Область значений этой функции: $-\infty < y < \infty$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ является нечетной, так как $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, и периодической с периодом $T = \pi$.

1.3.6. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция $y = \arcsin x$ (рис. 1.13, а) является обратной функции $y = \sin x$ на интервале $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Область определения $-1 \leq x \leq 1$, область значений $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Функция $y = \arcsin x$ является нечетной и возрастающей функцией.

Функция $y = \arccos x$ (рис. 1.13, б) является обратной функции $y = \cos x$ на интервале $0 \leq x \leq \pi$. Область определения $-1 \leq x \leq 1$, область

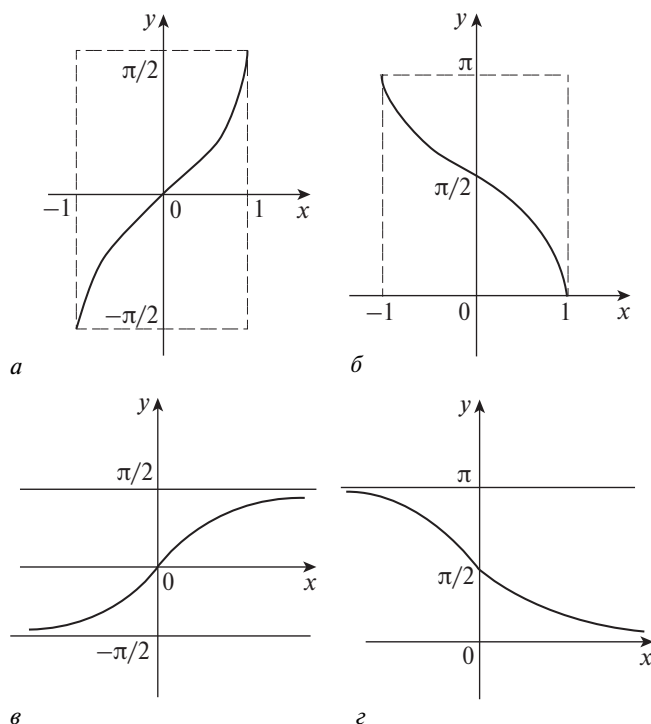


Рис. 1.13. Графики обратных тригонометрических функций: $a - y = \arcsin x$; $б - y = \arccos x$; $в - y = \arctg x$; $г - y = \text{arccctg} x$

значений $0 \leq y \leq \pi$. Функция $y = \arccos x$ является ни четной, ни нечетной.

Функция $y = \arctg x$ (рис. 1.13, в) является обратной функции $y = \tg x$ на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Область определения функции $-\infty < x < +\infty$, область значений $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Функция $y = \arctg x$ является нечетной, так как $\arctg(-x) = -\arctg x$.

Функция $y = \text{arccctg} x$ (рис. 1.13, г) является обратной функции $y = \text{ctg} x$ на интервале $0 < x < \pi$. Область определения $-\infty \leq x \leq +\infty$, область значений $0 < y < \pi$. Функция $y = \text{arccctg} x$ является ни четной, ни нечетной.

С помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также конечного числа вычис-

ления функций от функции можно получить функции, которые составляют класс *элементарных функций*.

Например: $y = \lg x^2 + \sin 3x$; $y = e^{\arcsin x}$; $y = \sqrt[3]{\cos 3x}$ и т. п.

1.4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Определение

*График функции $y = f(x)$ — это множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым *уравнением графика функции*.*

Основным методом построения графиков функций является *построение по точкам*. Метод заключается в том, что выбирают значения x_i из области определения и по формуле вычисляют значения y_i , которые заносят в табл. 1.2.

Таблица 1.2. Значения для построения графика по точкам

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

По данным табл. 1.2 находят точки на плоскости Oxy , которые затем соединяют плавной линией. Чем больше будет точек, тем точнее окажется график функции. Однако если имеется линейная зависимость, то достаточно вычислить координаты двух точек, через которые проводится прямая линия.

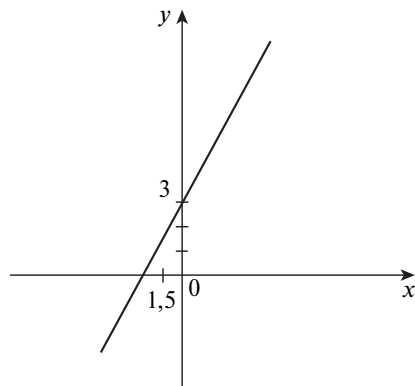


Рис. 1.14. График линейной функции $y = 2x + 3$

Пример 1.5. Построить график функции $y = 2x + 3$.

Решение. Это линейная функция. Для построения ее графика достаточно двух точек. Находим координаты двух точек. При $x = 0$ имеем $y = 3$; при $y = 0$ получаем $x = -1,5$. Отмечаем эти две точки на осях координат и соединяем их прямой линией. Получаем график функции $y = 2x + 3$ (рис. 1.14). ◁

При построении графиков вида $y = f(x) + \varphi(x)$ можно воспользоваться сложением графиков при условии, что графики функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ известны. Для этого необходимо сложить значения ординат графиков при одном значении аргумента.

Пример 1.6. Построить график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Складывая соответствующие значения известных графиков $y = x$ и $y = 1/x$, получим график функции $y = x + \frac{1}{x}$ (рис. 1.15). $\triangleleft$

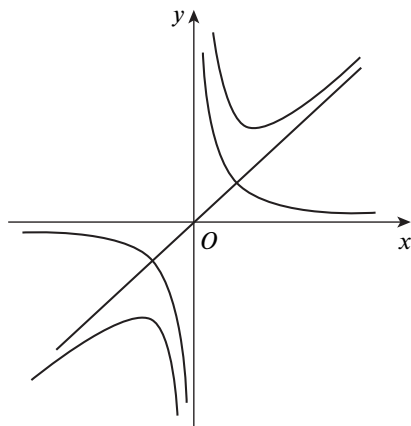


Рис. 1.15. График функции $y = x + \frac{1}{x}$

При построении графиков четных функций достаточно построить график для значений $x \geq 0$, а график для значений $x < 0$ будет симметричным относительно оси Oy (рис. 1.16, а). График нечетной функции будет симметричен относительно начала координат (рис. 1.16, б).

Если известен график функции $y = f(x)$, то построить графики следующих функций возможно путем *деформации* исходного графика.

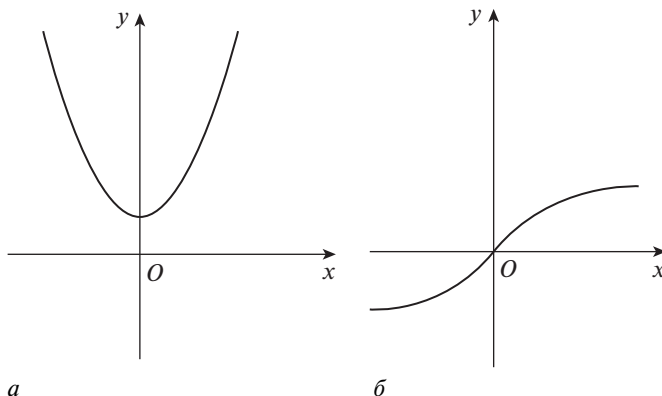


Рис. 1.16. Графики: а — четной функции симметричен относительно оси Oy ; б — нечетной функции симметричен относительно начала координат

Во-первых, график $y = x - a$ может быть получен путем *сдвига* первоначального графика вдоль оси Ox на величину a .

Пример 1.7. Построить график $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Построим график $y = \sin x$ (рис. 1.17, *a*, пунктир) и сдвинем его по оси x на $\pi/2$ (рис. 1.17, *a*, сплошная). $\triangleleft$

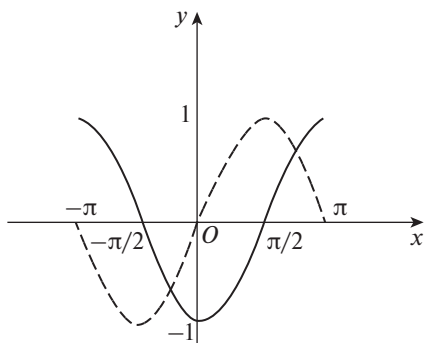
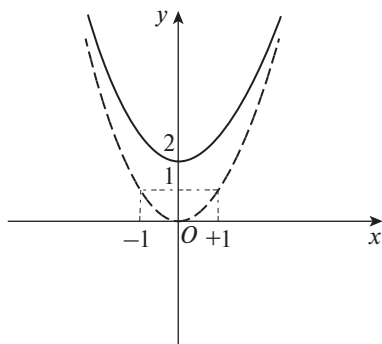
*a**б*

Рис. 1.17. Построение графиков функций: *a* — путем сдвига графика по оси Ox ; *б* — путем сдвига графика по оси Oy

Во-вторых, график $y = f(x) + b$ может быть получен путем *сдвига* первоначального графика по оси Oy на величину b .

Пример 1.8. Построить график $y = x^2 + 2$.

Решение. Построим график $y = x^2$ (рис. 1.17, *б*, пунктир) и сдвинем его по оси ординат на 2 (рис. 1.17, *б*, сплошная). $\triangleleft$

В-третьих, график функции $y = Af(x)$ может быть получен путем растягивания исходного графика вдоль оси Oy в A раз.

Пример 1.9. Построить график $y = 2\cos x$.

Решение. Построим график $y = \cos x$ (рис. 1.18, *a*, пунктир) и увеличим его значение по оси ординат в два раза (рис. 1.18, *a*, сплошная). $\triangleleft$

В-четвертых, график функции $y = f(kx)$ может быть получен путем *сжатия* исходного графика вдоль оси Ox в k раз.

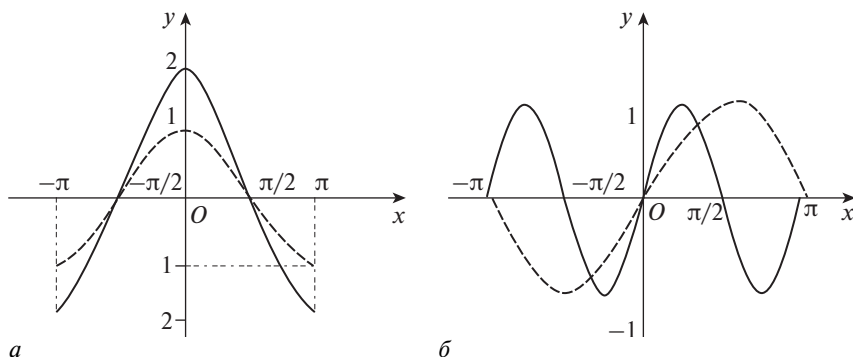


Рис. 1.18. Построение графиков функций: *a* — путем растягивания графика по оси Oy ; *б* — путем сжатия графика по оси Ox

Пример 1.10. Построить график функции $y = \sin 2x$.

Решение. Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 1.18, *б*, пунктир) и сожмем его значения по оси абсцисс в 2 раза (рис. 1.18, *б*, сплошная). $\triangleleft$

Таким образом, по графику $y = f(x)$ можно построить график функции вида $y = A[f(k(x - a) + b)]$.

1.5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Понятие предела является основой математического анализа. Использование понятия *предела функции* позволяет определить характер поведения функции при приближении аргумента к некоторой точке. На рис. 1.19, *a* изображен график функции $y = f(x)$, если значение аргумента будет приближаться к точке x_0 , то значение y будет приближаться к точке A .

Следовательно, предельное значение, которое может иметь функция $y = f(x)$, при достижении аргументом значения x_0 будет равно A .

Более строгое определение предела заключается в следующем.

Определение

Пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число A , если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное число δ , что для любого числа $x \neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется соотношение $|y - A| < \varepsilon$.

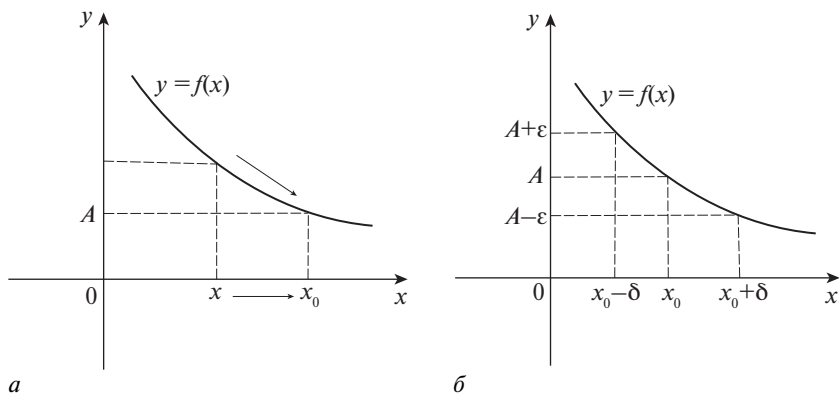


Рис. 1.19. Пояснение предела функции: *а* — приближение точки x к точке x_0 приводит к приближению y к точке A ; *б* — приближение точки x к точке x_0 приводит к приближению графика $y = f(x)$ к точке A в пределах полосы значений $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$

Данное определение говорит, что значение функции будет отличаться от величины A на сколь угодно малую величину, если аргумент x будет приближаться к значению x_0 .

На рис. 1.18, *б* показано, что точки графика $y = f(x)$ будут приближаться к точке A при приближении значения x к точке x_0 . Геометрически это означает, что при всех x , достаточно близких к x_0 , значения функции $f(x)$ будут находиться в сколь угодно узкой полосе значений $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$.

При рассмотрении графика на рис. 1.19, *б* можно отметить, что к точке x_0 можно приближаться как слева, то есть при увеличении значения x , так и справа, то есть при уменьшении величины x . Для некоторых функций это важно, поэтому вводится понятие одностороннего предела.

Определение

Число A_1 называется *левым пределом* (или *пределом слева*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|y - A_1| < \varepsilon$.

Предел слева в точке обозначается:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = A_1.$$

Аналогично определяется *правый предел* функции $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A_2.$$

Из определения односторонних пределов вытекает следующее заключение.

Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то, как следует из определения предела, существуют и односторонние пределы, равные A .

Справедливо и обратное утверждение. *Обычный предел* $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда левый и правый пределы в этой точке существуют и равны.

1.6. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим без доказательств основные теоремы о пределах функций, которые помогают находить пределы функций, представленных в виде алгебраических выражений.

Теорема 1.1

Если предел функции в точке x_0 существует, то он единственный.

Теорема 1.2

Предел постоянной равен этой постоянной: $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

Теорема 1.3

Предел суммы двух функций равен сумме пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Теорема 1.4

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Теорема 1.5

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Теорема 1.6

Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

В приведенных теоремах подразумевается, что у функций $f(x)$ и $g(x)$ общая область определения, включающая точку x_0 , и функции имеют предел в этой точке.

Рассмотрим вычисление пределов с помощью вышеприведенных теорем.

Пример 1.11. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 5x - 4)$.

Решение. Применяя теоремы 1.2, 1.3, 1.5 и заменяя переменную x ее предельным значением, найдем:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 5x - 4) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 5 \lim_{x \rightarrow 2} x - 4 = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 4 = 14. \triangleleft$$

Пример 1.12. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + x^2}{4x + 2}$.

Решение. Применяя теоремы 1.2, 1.3, 1.5 и 1.6 и заменяя переменную x ее предельным значением, найдем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + x^2}{4x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (5 + x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (4x + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 5 + \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x}{4 \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 2} = 2,5. \triangleleft$$

Определение

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ может принимать бесконечно малое значение, если при $x \rightarrow x_0$ ее числитель будет приближаться к нулю или знаменатель стремиться к бесконечности.

Пример 1.13. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{2x^2 + 4}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{2x^2 + 4} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} x}{2 \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x + 4} = \frac{0}{4} = 0. \triangleleft$$

Пример 1.14. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2x - 4}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2x - 4} = \frac{4}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - 4} = \frac{4}{\infty} = 0. \triangleleft$$

Иногда встречаются ситуации, когда числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, в этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для нахождения таких пределов необходимо числитель и знаменатель разложить на множители.

Пример 1.15. Найти $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

Решение. При подстановке $x = -2$ получим $\frac{\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 4}{\lim_{x \rightarrow -2} x + 2} = \frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности разложим на множители числитель дроби и сократим дробь.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -2 - 2 = -4. \triangleleft$$

Если при вычислении пределов возникает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то в этом случае числитель и знаменатель необходимо разделить на x с наибольшим показателем степени.

Пример 1.16. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$.

Решение. При подстановке $x = \infty$ получим $\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} x + 3}{\lim_{x \rightarrow \infty} x + 5} = \frac{\infty}{\infty}$.

Разделим числитель и знаменатель на x^2 . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty. \triangleleft$$

1.7. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

Понятие непрерывности функции можно пояснить на графиках функций, приведенных на рис. 1.20 и 1.21. Так, функция на рис. 1.20 плавно изменяется с изменением аргумента, в то время как функция на рис. 1.21 имеет разрыв в точке $x = x_0$. График первой функции можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, а для изображения графика второй функции карандаш будет оторван от бумаги в точке x_0 . Если рассматривать изменение функций $y = f(x)$, изображенных на рис. 1.20 и 1.21, с использованием понятия предела, то следует отметить: для функции на рис. 1.20 при приближении аргумента x к точке x_0 значение функции $f(x)$ будет приближаться к величине $f(x_0)$ независимо от того, стремится аргумент к точке x_0 слева или справа. Такая функция и называется *непрерывной*.

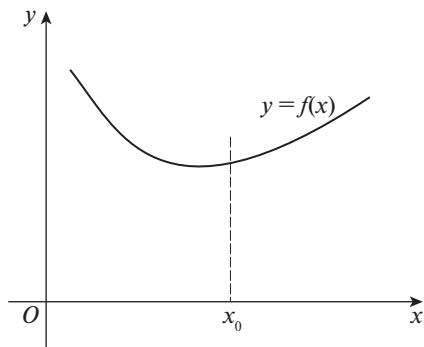


Рис. 1.20. Функция плавно изменяется с изменением аргумента

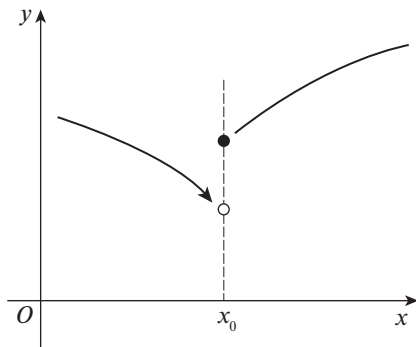


Рис. 1.21. Функция имеет разрыв в точке $x = x_0$

Определение

Функция $f(x)$ *непрерывна в точке x_0* , если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение

Функция $f(x)$ *непрерывна слева в точке x_0* , если левый предел функции в точке существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0).$$

Определение

Функция $f(x)$ *непрерывна справа в точке x_0* , если правый предел функции в точке существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Определение

Функция $f(x)$ *непрерывна в точке x_0* , если она имеет односторонние пределы, равные между собой и равные, в свою очередь, значению функции в точке x_0 .

Из понятия непрерывности функции следует:

- 1) функция непрерывна на интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала;
- 2) функция непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и непрерывна справа в точке a и слева в точке b .

Свойства непрерывных функций

1. Все элементарные функции непрерывны в своих областях определения.

2. Сумма и произведение двух непрерывных функций непрерывны.

3. Отношение двух непрерывных функций непрерывно повсюду, где знаменатель не равен нулю.

4. Функция, непрерывная на замкнутом промежутке, достигает на нем своего наибольшего и своего наименьшего значения.

5. Если непрерывная функция меняет знак на замкнутом промежутке, то она, по крайней мере, один раз пересекает ось Ox .

Если в некоторой точке x_0 не выполняется условие непрерывности, то она называется *точкой разрыва*. Так, на рис. 1.21 точка $x = 0$ является точкой разрыва, так как пределы слева и справа в этой точке не равны. Такой тип разрыва, когда пределы слева и справа в точке x_0 существуют, но не равны между собой, называется *скачком*.

Скачок, или *неустранимый разрыв*, является *разрывом первого рода*. К таким разрывам относится и *устраняемый разрыв*, если существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, но при этом $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, либо функция не определена в точке x_0 . Однако такой разрыв можно устранить, доопределив функцию в точке разрыва.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow x_0$, то точка x_0 называется *точкой бесконечного разрыва функции*. На рис. 1.22 изображен гра-

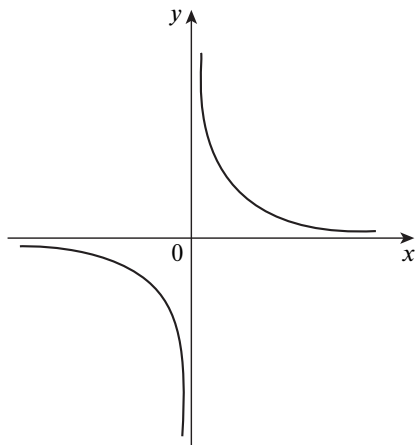


Рис. 1.22. Точка разрыва $x = 0$. Разрыв второго рода

в точке $x = 0$, то есть имеет скачок и, следовательно, разрыв первого рода. $\triangleleft$

фик функции $y = \frac{1}{x}$. В точке $x = 0$

функция имеет бесконечный разрыв. Если хотя бы один из пределов слева или справа от точки x_0 равен бесконечности либо совсем не существует, то это *разрыв второго рода*.

Пример 1.17. Найти точку разрыва и установить род разрыва функции $y = \frac{|x|}{x}$.

Решение. График функции изображен на рис. 1.23. Из графика видно, что функция не определена

в точке $x = 0$, то есть имеет скачок и, следовательно, разрыв первого рода.

Пример 1.18. При каком значении числа a функция будет непрерывной?

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1; \\ ax & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

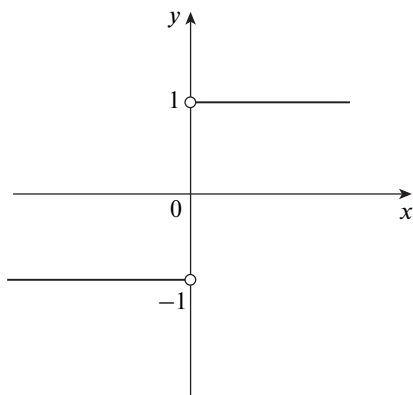


Рис. 1.23. График функции $y = \frac{|x|}{x}$

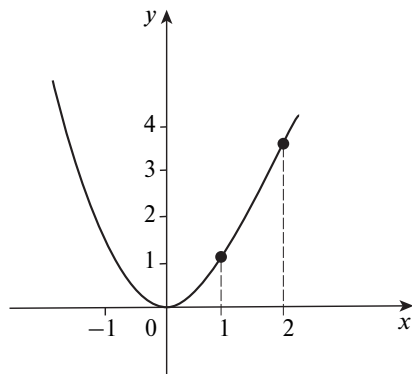


Рис. 1.24. График функции к примеру 1.18

Решение. Функция будет непрерывной, если пределы функции слева и справа в точке $x = 1$ будут равны (рис. 1.24):

$$\lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ax = 1, \text{ если } a = 1. \triangleleft$$

Пример 1.19. Найти точку разрыва и построить график функции

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Решение. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ име-

ет разрыв в точке $x = 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, следовательно, это разрыв второго рода (рис. 1.25). $\triangleleft$

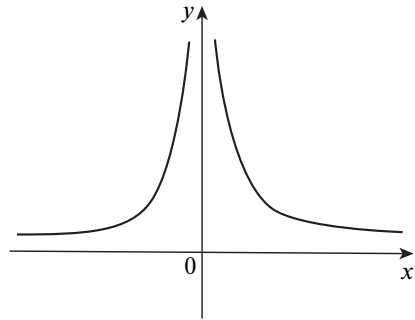


Рис. 1.25. График функции $y = \frac{1}{x^2}$. Разрыв второго рода

1.8. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим без доказательства некоторые свойства непрерывных функций на замкнутом интервале.

Теорема 1.7

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то между точками a и b существует точка c , в которой $f(c) = 0$.

Эта теорема имеет простое геометрическое пояснение, приведенное на рис. 1.26.

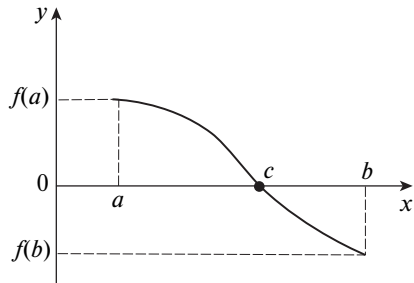


Рис. 1.26. График непрерывной функции, имеющей точку c , в которой $f(c) = 0$

Теорема 1.8 (теорема Вейерштрасса)

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

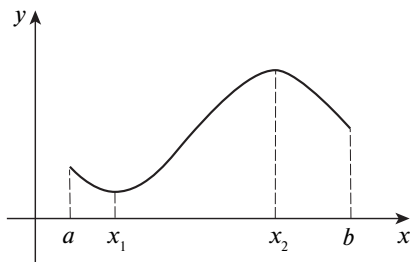


Рис. 1.27. Иллюстрация теоремы Вейерштрасса

На рис. 1.27 видно, что при $x = x_1$ функция имеет наименьшее значение из всех возможных, а в точке $x = x_2$ функция принимает максимальное значение.

Теорема 1.9

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка соответствующие значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то для любого числа C , за-

ключенного между A и B , найдется точка x_1 внутри отрезка $[a, b]$, что $f(x_1) = C$.

Данная теорема говорит, что непрерывная функция при переходе от одного значения к другому принимает и все промежуточные значения (рис. 1.28).

Теорема 1.10

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Функция $f(x)$ считается ограниченной на отрезке $[a, b]$, если существует такое число $A > 0$, что значения функции на отрезке $[a, b]$ не выходят из полосы, ограниченной прямыми $y = A$ и $y = -A$ (рис. 1.29).

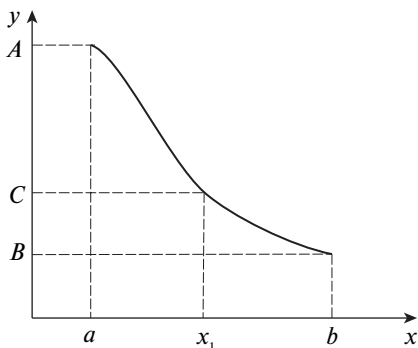


Рис. 1.28. Иллюстрация теоремы 1.9

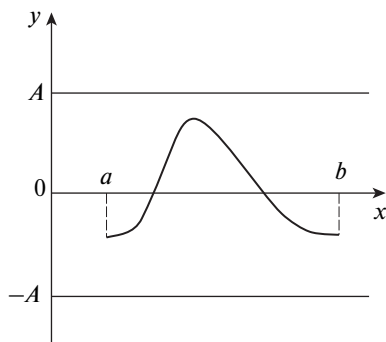


Рис. 1.29. График непрерывной функции, ограниченной на отрезке $[a, b]$

1.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

К теме «Функция одной переменной»

1.1. Найти область определения и область значений функций:

1) $y = \frac{1}{x^2};$

2) $y = \frac{2x}{x+4};$

3) $y = \sqrt{1-x^2};$

4) $y = \sqrt{x-1};$

5) $y = \sqrt{x^2-4};$

6) $y = \frac{1}{x^2-1};$

7) $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+2};$

8) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

9) $y = \lg(x-2);$

10) $y = e^{3x}.$

1.2. Указать, какой является данная функция: а) четной, б) нечетной
в) ни четной, ни нечетной:

1) $y = |x|;$

2) $y = 2x;$

3) $y = x^2 + 4;$

4) $y = \frac{1}{x};$

5) $y = x^2 - x;$

6) $y = \frac{1}{x^2-1};$

7) $y = \lg|x|;$

8) $y = \frac{1}{x^2+1};$

9) $y = |\lg x|;$

10) $y = \frac{1}{1-x^3};$

11) $y = 2\sin x + \cos x;$

12) $y = x|x|.$

1.3. Найти период функции:

1) $y = \sin 2x;$

2) $y = \cos \frac{x}{2};$

3) $y = \operatorname{tg} 3x;$

4) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}.$

1.4. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = 3x - 2$;

2) $y = x^3 + 1$;

3) $y = x^3$;

4) $y = \sqrt{x-1}$.

1.5. Указать интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y = x^2$;

2) $y = |x|$;

3) $y = \sin x$;

4) $y = \frac{1}{x}$.

К теме «Построение графиков функций»

1.6. Построить графики функций:

1) $y = \sin x + 1$;

2) $y = x^2 - x$;

3) $y = x^3 + 1$;

4) $y = (x-1)^2$;

5) $y = (x+3)^3$;

6) $y = -x^3$;

7) $y = 2^{x+1}$;

8) $y = \log_2(x-2)$.

К теме «Теоремы о пределах функций»

1.7. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+2}{3x+1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (3+2x+x^2-4x)^3$;

3) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$;

4) $\lim_{x \rightarrow 10} (x^2 \lg x)$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{2x^2+1}$;

7) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x-3}{2x-1}$;

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-1}{x+1}$;

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1+2x^2}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3}$.

1.8. Используя разложение функций на множители, найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3-27}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25}.$

1.9. Используя деление на аргумент, найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - x - 1};$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x + 7};$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x + 8}{5x^3 + 27x^2 + x};$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + x}{7x^2 - x}.$

К теме «Свойства непрерывных функций»

1.10. Исследовать на непрерывность следующие функции:

1) $y = x^2;$

2) $y = x^3;$

3) $y = 2^x;$

4) $y = \frac{1}{x + 2}.$

1.11. Найти точки разрыва и установить род разрыва:

1) $y = \frac{x}{x - 1};$

2) $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4};$

3) $y = \frac{\sin x}{x};$

4) $y = e^{\frac{1}{x}}.$

1.12. При каком значении числа a функция будет непрерывной?

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 2; \\ ax + 2 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

1.13. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 4; \\ x + 4 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$