ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

УЧЕБНИК

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по медицинскому и фармацевтическому
образованию вузов России в качестве учебника
для студентов медицинских вузов

Москва
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
«ГЭОТАР-Медиа»
2012

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
О-75

Рецензенты:
Невзоров В.Б. – д-р физ.-мат. наук, проф. математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета;
Смирнов Е.Ю. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры медицинской и биологической физики Первого Московского государственного медицинского университета им. И.М. Сеченова.

Авторский коллектив:
Павлушков И.В. — канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Санкт-Петербургской химико-фармацевтической академии;
Розовский Л.В. — д-р физ.-мат. наук, проф.;
Капульцевич А.Е.— канд. техн. наук, доцент;
Кулонен Л.А. — кандидат физ.-мат. наук, доцент;
Камоцкая А.М., Степанова И.Л., Тышко Н.М., Ивановская Т.Ю., Маслова В.Д. — старшие преподаватели.

О-75 **Основы высшей математики и математической статистики** : учебник / И. В. Павлушков и др.: 2-е изд., испр. — М. : ГЭОТАР-Медиа, 2012. — 432 с. : ил.

ISBN 978-5-9704-1577-1

В учебнике изложен курс высшей математики для фармацевтического факультета, включающий основные элементарные функции, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной, элементы дифференциального исчисления функций нескольких переменных, дифференциальные уравнения первого и второго порядка, основы теории вероятностей и математической статистики.

Учебник содержит подробные пояснения теоретического материала, а также большое количество примеров и задач.

Предназначен студентам медицинских и фармацевтических вузов.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9704-1577-1

ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 1.1. Функции

1.1.1. Определение функции, числовых промежутков и окрестностей точек

Одним из основных математических понятий является понятие функции, устанавливающее зависимость между элементами двух множеств.

Определение. Пусть X, Y — некоторые множества, элементами которых являются некоторые числа. Если каждому числу $x \in$ $\in X$ по некоторому закону или правилу f ставится в соответствие число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана числовая функция f и записывают эту функциональную зависимость формулой $y = f(x)$ или, более наглядно, в виде диаграммы:

$$X \xrightarrow{f} Y. \tag{1.1}$$

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная y называется *зависимой переменной* (от x) или *функцией.*

Множество X — область изменения аргумента — называется *областью определения функции*. Множество Y, содержащее все значения, которые принимает y, *называется областью изменения функции.*

При дальнейшем изложении множества X и Y часто оказываются конечными или бесконечными промежутками.

а. *Конечные промежутки*:

открытый интервал (или просто интервал) (a, b) — множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, или $(a, b) \Leftrightarrow (a < x < b)$, где $\Leftrightarrow$ знак эквивалентности;

замкнутый интервал (или отрезок) $[a, b]$: $[a, b] \Leftrightarrow (a \leqslant x \leqslant b)$;

полуоткрытые интервалы $(a, b]$ и $[a, b)$: $(a, b] \Leftrightarrow (a < x \leqslant b)$ и $[a, b) \Leftrightarrow (a \leqslant x < b)$ соответственно.

б. *Бесконечные промежутки*:

$(-\infty, +\infty) = \Re$ — множество всех вещественных чисел, т. е. $\Re \Leftrightarrow (-\infty < x < +\infty)$; аналогично, $(a, +\infty) \Leftrightarrow (a < x < +\infty)$ и т. д.

Числа a, b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков.

Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси влево и вправо от начала 0.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). *Окрестностью точки* x_0 называется любой интервал (a, b), содержащий точку x_0, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, симметричный относительно x_0, называется *ε-окрестностью точки* x_0.

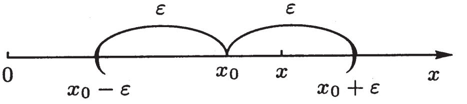

Рис. 1.1. Изображение ε-окрестности точки x_0.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то справедливы неравенства

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

что равносильно

$$|x - x_0| < \varepsilon.$$

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ можно найти, подставив a вместо аргумента: $f(a)$. При этом a может быть как буквенным выражением, числом, так и некоторой функцией, например $\varphi(t)$. В последнем случае $f(\varphi(t))$ будет сложной функцией, с ней мы ознакомимся в п. 1.1.4.

Примеры.

Найти область определения и область значений функций.

1. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение. Область определения этой функции состоит из всех x, для которых она имеет смысл. Таким образом, $X = \{|x| \leqslant \leqslant 1\} \Leftrightarrow [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$, т. е. $[-1, 1] \xrightarrow{f} [0, 1]$.

2. $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Решение. Здесь независимая переменная n принимает целые положительные значения $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$, следовательно, y является функцией натурального аргумента и вычисляется по заданной формуле $Y = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\right\}$, $N \xrightarrow{f} Q$ (Q — множество рациональных чисел).

3. Построить ε-окрестность точки $x_0 = 2$ ($\varepsilon = 0{,}1$).

Решение. По определению, ε-окрестностью точки 2 будет интервал $|x - 2| < 0{,}1$ или $-0{,}1 < x - 2 < 0{,}1 \Rightarrow 1{,}9 < x < 2{,}1$.

Самостоятельная работа

Построить интервалы изменения переменной x, удовлетворяющей неравенствам:

1. $|x| < 4$. **2.** $x^2 \leqslant 9$. **3.** $|x - 4| < 1$.

4. $-1 < x - 3 \leqslant 2$. **5.** $x^2 > 9$. **6.** $(x - 2)^2 \leqslant 4$.

Найти области определения функций:

1. $y = \sqrt{x + 2}$. **2.** $y = \sqrt{9 - x^2}$. **3.** $y = \sqrt{4x - x^2}$.

4. $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4 + x}$. **5.** $y = \arcsin \dfrac{x - 1}{2}$.

6. $y = -\sqrt{2 \sin x}$. **7.** $y = -\dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$.

8. $y = \sqrt{x + 1} - \sqrt{3 - x}$.

Вычислить значения функций в заданных точках:

1. $f(x) = x^2 - x + 1;\quad f(2),\quad f(a+1).$

2. $\varphi(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1};\quad \varphi(3/2),\quad \varphi(1/x),\quad \dfrac{1}{\varphi(x)}.$

3. $F(x) = x^2;\quad \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a},\quad F\left(\dfrac{a+h}{2}\right) - F\left(\dfrac{a-h}{2}\right).$

1.1.2. Некоторые свойства функций и их графиков

Пусть задана функция $f\colon X \to Y$. Правило, по которому можно находить y, зная x, может быть задано графиком функции.

Определение. *Графиком функции* в декартовой прямоугольной системе координат называется множество всех точек, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты — соответствующими значениями функции.

Пример. Графиком функции $y = x^2$ является парабола, ось симметрии которой совпадает с положительной полуосью ординат, а вершина с началом координат.

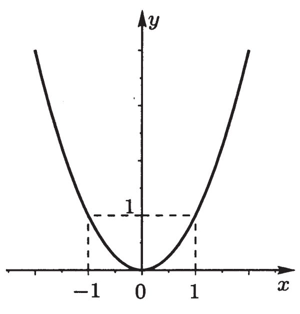

Рис. 1.2. График функции $y = x^2$.

Часто графики автоматически вычерчиваются самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Преимуществом такого представления функции является наглядность, а недостатком — неточность.

Функцию можно задавать также с помощью таблицы или формулы (аналитически).

Табличный способ применяется на практике при обработке результатов наблюдений приближенных значений функции.

Аналитический способ задания функции является наиболее удобным для полного исследования функции при помощи методов математического анализа.