

Е.В. Греков

Математика

**Учебник для студентов
фармацевтических и медицинских вузов**

Министерство образования и науки РФ

Рекомендовано ГБОУ ВПО «Первый Московский государственный
медицинский университет имени И.М. Сеченова» в качестве учебника
для студентов образовательных учреждений высшего профессионального
образования, обучающихся по направлению подготовки
«Здравоохранение» по дисциплине «Математика»

Регистрационный номер рецензии 341 от 9 июля 2014 года

ФГАУ «Федеральный институт развития образования»



Москва
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
«ГЭОТАР-Медиа»
2018

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. ФУНКЦИИ	7
§ 1.1. Действительные числа	7
§ 1.2. Понятие функции	8
§ 1.3. Некоторые элементарные функции	12
§ 1.4. Предел функции	21
Задачи	29
Глава 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ	31
§ 2.1. Понятие производной функции	31
§ 2.2. Геометрический смысл производной функции	33
§ 2.3. Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования	36
§ 2.4. Производные высших порядков	44
§ 2.5. Дифференциал функции	46
Задачи	50
Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ	52
§ 3.1. Возрастающие и убывающие на интервале функции	52
§ 3.2. Необходимые и достаточные условия максимума и минимума функции	56
§ 3.3. Достаточные условия выпуклости и вогнутости функции	61
§ 3.4. Асимптоты кривых	64
§ 3.5. Построение графиков функций	67
Задачи	70
Глава 4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ	72
§ 4.1. Понятие функции нескольких аргументов	72
§ 4.2. Частные производные, частный и полный дифференциалы функции двух переменных	73
Задачи	79
Глава 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	81
§ 5.1. Понятие неопределенного интеграла	81
§ 5.2. Основные свойства неопределенных интегралов. Таблица простейших интегралов	82
§ 5.3. Некоторые способы интегрирования	85
Задачи	91

Глава 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	92
§ 6.1. Понятие определенного интеграла	92
§ 6.2. Основные свойства определенного интеграла.	96
§ 6.3. Формула Ньютона—Лейбница	99
§ 6.4. Некоторые методы вычисления определенных интегралов	101
§ 6.5. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла	105
§ 6.6. Работа переменной силы.	107
§ 6.7. Несобственные интегралы	108
Задачи	110
Глава 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	112
§ 7.1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения	112
§ 7.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными	114
§ 7.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	119
§ 7.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	121
§ 7.5. Примеры применения дифференциальных уравнений.	126
Задачи	134
Глава 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	136
§ 8.1. Случайные события	136
§ 8.2. Вероятность случайного события	138
§ 8.3. Некоторые теоремы теории вероятностей	142
§ 8.4. Формула Бернулли. Формула Пуассона	149
Задачи	151
Глава 9. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	153
§ 9.1. Определение случайной величины	153
§ 9.2. Дискретные случайные величины	154
§ 9.3. Непрерывные случайные величины	160
§ 9.4. Нормальный закон распределения	167
Задачи	174
Глава 10. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД	177
§ 10.1. Генеральная и выборочная совокупности.	178
§ 10.2. Представление результатов измерений	179
§ 10.3. Оценки параметров в генеральной совокупности.	185
§ 10.4. Доверительный интервал для оценки генеральной средней	189
§ 10.5. Оценка погрешностей прямых измерений	193
§ 10.6. Оценка погрешностей косвенных измерений	198
Задачи	202
Глава 11. АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ	204
§ 11.1. Статистическая и корреляционная зависимости.	204
§ 11.2. Метод наименьших квадратов	205

§ 11.3. Выборочное уравнение линейной регрессии	210
§ 11.4. Выборочный коэффициент линейной корреляции	216
Задачи	219
Глава 12. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ	221
§ 12.1. Проверка существенности корреляционной зависимости. Статистические гипотезы.	221
§ 12.2. Сравнение генеральных средних двух нормально распределенных случайных величин. Критерий Стьюдента	225
§ 12.3. Сравнение генеральных средних двух случайных величин с произвольным распределением	228
§ 12.4. Критерий знаков	231
§ 12.5. Сравнение генеральных дисперсий	233
§ 12.6. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения. Критерий согласия Пирсона	236
§ 12.7. Анализ качественных признаков, критерий χ^2	241
§ 12.8. Точный критерий Фишера.	245
Задачи	247
Глава 13. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	249
§ 13.1. Однофакторный дисперсионный анализ	250
§ 13.2. Двухфакторный дисперсионный анализ.	255
Задачи	260
Глава 14. ПЛАНИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ.	262
§ 14.1. Применение статистических методов в медицине.	262
§ 14.2. Рандомизация и слепой метод.	263
Задачи	266
Глава 15. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ.	268
§ 15.1. Понятие временного ряда	268
§ 15.2. Уравнение тренда временного ряда	269
§ 15.3. Метод скользящего среднего.	272
Задачи	274
Ответы	276
Литература.	286
Приложение.	288
Предметный указатель.	297

Глава 9

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение. *Случайной величиной* называется величина, которая в результате испытания или измерения принимает одно возможное значение, заранее неизвестно какое.

Случайными величинами являются, например, число очков, выпадающее при бросании игрального кубика, число студентов на лекции, продолжительность жизни человека, рост людей и т. д.

Случайные величины обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, \dots$, а их возможные значения — строчными буквами $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$

Мы рассмотрим два класса случайных величин — *дискретные* и *непрерывные*.

Дискретной случайной величиной называют случайную величину, которая в результате испытания или измерения может принимать отдельные значения с определенными вероятностями, которые можно пронумеровать.

Мы будем пользоваться следующим менее строгим, но более понятным определением дискретной случайной величины, которое применимо ко всем рассматриваемым далее дискретным случайным величинам.

Дискретной случайной величиной будем называть случайную величину, которая в результате испытания или измерения может принимать отдельные изолированные друг от друга значения с определенными вероятностями.

Например, число очков, выпадающее при бросании игрального кубика, может принимать только целые значения от 1 до 6. Число студентов на лекции также может быть только целым. Отметим, что дискретная случайная величина может принимать не только целые, но и дробные значения. К примеру, на гранях игрального кубика можно написать дробные числа, и тогда при бросании кубика будет выпадать дробное число очков. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Отметим, что формально можно считать дискретной случайной величиной величину, которая всегда принимает единственное значение.

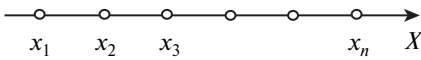


Рис. 9.1. Дискретная случайная величина может принимать только значения $x_1, x_2, \dots, x_n$

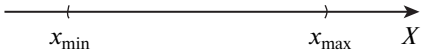


Рис. 9.2. Непрерывная случайная величина может принимать любые значения из промежутка от $x_{\min}$ до $x_{\max}$

Мы будем использовать это при рассмотрении свойств дискретных случайных величин.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, которая в результате испытания или измерения может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Например, продолжительность жизни, рост людей, температура

больного могут принимать любые значения из некоторых промежутков. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Дискретные и непрерывные случайные величины можно изобразить на числовой оси (рис. 9.1, 9.2).

§ 9.2. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим сначала дискретные случайные величины. Заранее неизвестно, какое значение принимает случайная величина в результате испытания или измерения. Однако часто можно найти вероятность, с которой случайная величина принимает то или иное значение.

Определение. *Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между всеми возможными значениями этой случайной величины и их вероятностями.

Часто закон распределения задается в виде таблицы (табл. 9.1).

Таблица 9.1. Закон распределения дискретной случайной величины

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — возможные значения случайной величины; $p_1, p_2, \dots, p_n$ — соответствующие этим значениям вероятности.

Составим, например, закон распределения числа очков, выпадающих при бросании игрального кубика. Возможные значения этой случайной величины — целые числа от 1 до 6. Вероятность выпадения каждой грани $p = 1/6$. Следовательно, закон распределения имеет вид, представленный табл. 9.2.

Таблица 9.2. Закон распределения числа очков при бросании игрального кубика

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Закон распределения может быть представлен также в виде формулы.

Основные особенности закона распределения случайной величины можно описать несколькими числами, определяемыми соответствующими формулами. Эти числа называются *числовыми характеристиками случайной величины*. К ним относятся: *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*.

Математическое ожидание

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на соответствующие этим значениям вероятности.

Пусть случайная величина может принимать только значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда математическое ожидание, обозначаемое $M(X)$ или μ , дается следующим равенством:

$$M(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n, \quad (9.1)$$

где x_i — возможные значения случайной величины; p_i — соответствующие им вероятности. В формуле (9.1) используют одно из обозначений математического ожидания $M(X)$ или μ и либо знак суммы

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

либо сумму в виде $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$.

Пусть, например, для некоторой студенческой группы из 10 человек закон распределения для числа студентов, присутствующих на занятии, имеет вид, представленный табл. 9.3.

Таблица 9.3. Закон распределения числа студентов, присутствующих на занятии

X_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,8	0,1

Математическое ожидание случайной величины X_1 , представляющей собой число студентов, присутствующих на занятии, равно

$$M(X_1) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_{10} p_{10} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + \dots + 8 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,1 = 9.$$

Смысл математического ожидания заключается в том, что оно представляет собой среднее значение случайной величины при большом числе испытаний или измерений. Причем, чем больше число испытаний, тем ближе среднее значение к математическому ожиданию. Примем это утверждение без доказательства. В нашем примере математическое ожидание $M(X_1) = 9$ представляет собой среднее число студентов данной группы, присутствующих на занятии.

Свойства математического ожидания

Приведем основные свойства математического ожидания.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(C) = C, \quad C = \text{const.}$$

Свойство 2. Постоянный множитель C можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X), \quad C = \text{const.}$$

Свойство 3. Математическое ожидание суммы или разности (алгебраической суммы) случайных величин X и Y равно сумме или разности математических ожиданий этих случайных величин:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

Свойство 4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Докажем некоторые из этих свойств.

Доказательство свойства 1. Константу C можно рассматривать как случайную величину, принимающую единственное значение $x_1 = C$ с вероятностью $p_1 = 1$. Поэтому

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

Доказательство свойства 2. По формуле (9.1) для математического ожидания

$$\begin{aligned} M(CX) &= Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n = \\ &= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = CM(X). \end{aligned}$$

Свойства 3 и 4 примем без доказательства.

Мода

Определение. *Модой* распределения дискретной случайной величины называют такое значение случайной величины x_m , вероятность которого больше вероятности предыдущего и последующего значений, т. е. вероятность имеет максимум в точке x_m .

В законе распределения могут быть один, два и более максимумов вероятности. Каждое значение случайной величины, соответствующее максимуму вероятности, называется *модой*. Распределения, имеющие одну моду, называются *одномодальными*, а распределения, имеющие две или более мод, называются *двухмодальными* или *многомодальными*.

Пусть, например, случайная величина имеет закон распределения, представленный табл. 9.4.

Таблица 9.4. Закон распределения случайной некоторой величины

X	1	2	3	4	5
p	0,05	0,2	0,3	0,4	0,05

Мода этой случайной величины равна 4. Для данного распределения мода не совпадает с математическим ожиданием, которое равно 3,2.

Дисперсия дискретной случайной величины

Рассмотрим два распределения дискретной случайной величины. Пусть, например, один закон распределения представлен табл. 9.3 и описывает число студентов, пришедших на занятия в некоторой группе из 10 человек. Пусть в другой студенческой группе из 10 человек закон распределения аналогичной случайной величины имеет вид, представленный табл. 9.5.

Таблица 9.5. Закон распределения для числа студентов, присутствующих на занятии в группе 2

X_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,4	0,1	0,1	0,1

Математическое ожидание, рассчитанное для закона распределения из табл. 9.3, было равно $M(X_1) = 9$. Нетрудно подсчитать, что для другой группы $M(X_2) = 7$.

Видно, что кроме разных математических ожиданий различен разброс возможных значений случайной величины около математического ожидания. Для характеристики этого разброса вводится дисперсия дискретной случайной величины.

Определение. *Дисперсией дискретной случайной величины* называется математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

Дисперсия обозначается $D(X)$ или D , либо $\sigma^2(X)$ или σ^2 :

$$D(X) = \sigma^2(X) = M\{(X - \mu)^2\},$$

где X — случайная величина; μ — ее математическое ожидание.

Воспользовавшись определением математического ожидания (9.1), получаем выражение для дисперсии:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n, \quad (9.2)$$

где x_i — возможные значения случайной величины; p_i — соответствующие им вероятности.

В формуле (9.2) можно использовать либо знак суммы

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i,$$

либо сумму в виде $(x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n$.

Дисперсия характеризует средний разброс (рассеяние) значений случайной величины около математического ожидания. Чем больше рассеяние, тем больше дисперсия случайной величины. В качестве примера рассмотрим две случайные величины с разным рассеянием около математического ожидания.

Пример 9.1. Рассчитать дисперсии двух случайных величин с законами распределения, заданными табл. 9.3 и 9.5.

Решение. По формуле (9.2) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= (8-9)^2 \cdot 0,1 + (9-9)^2 \cdot 0,8 + (10-9)^2 \cdot 0,1 = 0,2; \\ \sigma_2^2 &= (4-7)^2 \cdot 0,1 + (5-7)^2 \cdot 0,1 + (6-7)^2 \cdot 0,1 + (7-7)^2 \cdot 0,4 + \\ &\quad + (8-7)^2 \cdot 0,1 + (9-7)^2 \cdot 0,1 + (10-7)^2 \cdot 0,1 = 2,8. \end{aligned}$$

Получили во втором случае большее значение дисперсии: $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$. Из таблиц видно, что рассеяние значений случайной величины во втором случае также больше в соответствии со смыслом дисперсии.

Для вычисления дисперсии можно пользоваться также следующей формулой

$$D(X) = M(X^2) - \mu^2. \quad (9.3)$$

Вывод формулы (9.3). Пользуясь свойствами математического ожидания, получаем из (9.2):

$$\begin{aligned} D(X) &= M\{(X - \mu)^2\} = M(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = M(X^2) - M(2X\mu) + M(\mu^2) = \\ &= M(X^2) - 2\mu M(X) + \mu^2 = M(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = M(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

В определении дисперсии (9.2) используется квадрат отклонения значений случайной величины от математического ожидания $(x_i - \mu)^2$ по следующей причине. Разность $(x_i - \mu)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Можно доказать, что математическое ожидание отклонения $(x_i - \mu)$ без квадрата всегда равно нулю $M(X - \mu) = 0$, т. е. не может характеризовать рассеяние значений случайной величины.

Свойства дисперсии

Приведем некоторые свойства дисперсии случайной величины.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель C можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Свойство 3. Дисперсия суммы или разности двух *независимых* случайных величин равна *сумме* их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказательство свойства 1. По свойству 1 математического ожидания $M(C) = C$. Поэтому

$$D(C) = M\{(C - C)^2\} = M(0) = 0.$$

Доказательство свойства 2. Воспользуемся свойством 2 математического ожидания $M(CX) = CM(X)$:

$$\begin{aligned} D(CX) &= M\{[CX - M(CX)]^2\} = M\{[CX - CM(X)]^2\} = M\{C^2[X - M(X)]^2\} = \\ &= C^2 M\{[X - M(X)]^2\} = C^2 D(X). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается свойство 3.

Среднее квадратическое отклонение

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии.

Среднее квадратическое отклонение обозначается буквой σ :

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (9.4)$$

Среднее квадратическое отклонение, также как и дисперсия, характеризует средний разброс значений случайной величины около ее математического ожидания. Чем больше разброс, тем больше среднее квадратическое отклонение.

Например, для законов распределения, задаваемых табл. 9.3 и 9.5, средние квадратические отклонения равны соответственно $\sigma_1 = \sqrt{0,2} \approx 0,45$, $\sigma_2 = \sqrt{2,8} \approx 1,67$.

Как видно из таблиц, разброс значений больше во втором случае. В соответствии с этим $\sigma_2 > \sigma_1$.

Если случайная величина X имеет физическую размерность (например, метры, килограммы и т. д.), то среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, а дисперсия имеет размерность $[X]^2$ (м^2 , кг^2 и т. д.).

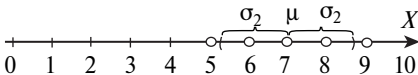


Рис. 9.3. Возможные значения, математическое ожидание μ и среднее квадратическое отклонение σ случайной величины с законом распределения, задаваемым табл. 9.5

В отличие от дисперсии, среднее квадратическое отклонение можно изобразить на оси случайной величины X . При этом виден средний разброс значений случайной величины около математического ожидания. Например, для случайной величины, определяемой табл. 9.5, можно отметить на

оси Ox математическое ожидание $\mu_2 = 7$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_2 \approx 1,67$ (рис. 9.3).

§ 9.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В случае непрерывной случайной величины нельзя написать закон распределения в виде таблицы, поскольку непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого промежутка. Для характеристики распределения непрерывной случайной величины используют *функцию распределения* и *плотность распределения вероятностей*.

Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение. *Функцией распределения* непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что в результате испытания случайная величина примет значение, меньшее x :

$$F(x) = P(X < x), \quad (9.5)$$

где $F(x)$ — функция распределения; x — аргумент функции распределения; X — случайная величина; $P(X < x)$ — вероятность того, что случайная величина X примет какое-либо значение, меньшее x .

Аргумент функции распределения задается произвольно. Например, $F(2) = P(X < 2)$. Здесь $P(X < 2)$ — вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет какое-либо значение, меньшее 2.

Мы определили функцию распределения непрерывной случайной величины. Аналогично можно определить функцию распределения дискретной случайной величины, но мы не будем ее рассматривать.

Каждая непрерывная случайная величина имеет свою функцию распределения. Однако есть общие свойства функции распределения. Приведем некоторые из них.

Свойства функции распределения

Свойство 1. $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

Свойство 3. Функция распределения является неубывающей функцией.

Свойство 4. Вероятность попадания значения случайной величины в результате испытания в интервал $a < X < b$ равна

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \quad (9.6)$$

Последнее свойство справедливо для непрерывной функции распределения $F(x)$, т. е. не испытывающей скачков. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие функции распределения.

В соответствии со свойствами можно нарисовать типичный график функции распределения, представленный на рис. 9.4.

Функция распределения $F(x)$ неубывающая и принимает значения в пределах от 0 до 1.

Докажем некоторые из свойств функции распределения.

Доказательство свойства 1. Свойство 1 следует из того, что функция распределения $F(x)$ равна вероятности события, а вероятность со-

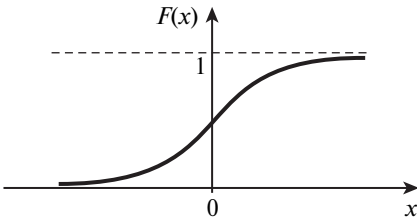


Рис. 9.4. График функции распределения непрерывной случайной величины

бытия может принимать значения $0 \leq p \leq 1$.
Доказательство свойства 3. Для доказательства того, что функция распределения $F(x)$ является неубывающей, надо доказать, что для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из условия $x_1 < x_2$ следует, что $F(x_1) \leq F(x_2)$. Пусть $x_1 < x_2$. Событие $X < x_2$ можно представить как сумму двух несовместных событий $X < x_1$ и $x_1 \leq X < x_2$. Тогда по формуле (8.4)

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

откуда

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1). \quad (9.7)$$

По свойству вероятности $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$, поэтому получаем $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$ или $F(x_2) \geq F(x_1)$. Для непрерывной функции распределения нестрогое неравенство $x_1 \leq X < x_2$ в (9.7) можно заменить строгим и получить

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Таким образом, мы доказали формулу (9.6).

Можно доказать, что для непрерывной случайной величины, имеющей непрерывную функцию распределения $F(x)$, вероятность того, что случайная величина примет определенное значение, равна нулю:

$$P(X = a) = 0.$$

Таким образом, мы можем говорить только о вероятности попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал (a, b) .

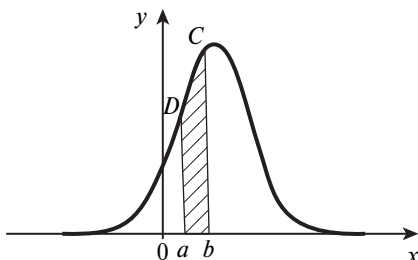
Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Определение. Плотностью распределения вероятностей (плотностью вероятности) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная функции распределения $F(x)$ этой случайной величины:

$$f(x) = F'(x). \quad (9.8)$$

Здесь $f(x)$ — плотность вероятности; $F(x)$ — функция распределения.

Типичный график плотности вероятности представлен на рис. 9.5. Рассмотрим некоторые свойства плотности вероятности, из которых будет виден ее наглядный смысл.



Свойства плотности вероятности

Свойство 1. Вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет какое-либо значение в интервале (a, b) , обозначается $P(a < X < b)$ и равна

Рис. 9.5. График плотности вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (9.9)$$

где $f(x)$ — плотность вероятности.

Геометрически вероятность $P(a < X < b)$ равна площади криволинейной трапеции $abCD$, изображенной на рис. 9.5.

Свойство 2. Вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет какое-либо значение в малом интервале $(x, x + \Delta x)$, приблизительно равна

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x. \quad (9.10)$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше Δx .

Свойство 3. Интеграл от плотности вероятности в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (9.11)$$

Свойство 4. Плотность вероятности является неотрицательной функцией:

$$f(x) \geq 0.$$

Доказательство свойства 1. Поскольку по определению $f(x) = F'(x)$, где $F(x)$ — функция распределения, то $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$. По формуле Ньютона–Лейбница интеграл от плотности вероятности в пределах от a до b равен

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (9.12)$$

Тогда из (9.6) и (9.12) получаем (9.9).

Доказательство свойства 2. По формулам (9.9) и (9.12)

$$P(x < X < x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = F(x + \Delta x) - F(x). \quad (9.13)$$

Разность $F(x + \Delta x) - F(x)$ есть приращение функции $F(x)$. По свойству дифференциала функции приращение функции приблизительно равно дифференциалу

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx F'(x) \cdot \Delta x. \quad (9.14)$$

Объединяя (9.13), (9.14) и определение $f(x) = F'(x)$, получаем формулу (9.10).

Доказательство свойства 3. Свойство 3 следует из (9.12) и свойства 2 для функции распределения $F(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

Доказательство свойства 4. Свойство 4 следует из определения плотности вероятности $f(x)$ как производной функции распределения $F(x)$ и из того, что функция $F(x)$ неубывающая (производная неубывающей функции $F'(x) \geq 0$).

Свойство 2 определяет наглядный смысл плотности вероятности $f(x)$. *Плотность вероятности $f(x)$ пропорциональна вероятности того, что в результате испытания или измерения случайная величина X примет значение в малом интервале вблизи x : $(x, x + \Delta x)$.*

При одинаковой величине Δx вероятность больше для тех значений x , для которых больше $f(x)$. Таким образом, функция $f(x)$ и ее график (см. рис. 9.5) определяют распределение вероятности значений случайной величины, получаемых в результате испытания или измерения. Поэтому функция $f(x)$ называется плотностью распределения вероятностей.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Так же, как в случае дискретной случайной величины, введем *числовые характеристики непрерывной случайной величины*, к которым относятся *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение*. В случае непрерывной случайной величины числовые характеристики часто называют *параметрами случайной величины* или *параметрами распределения*.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется величина, равная определенному интегралу

$$M(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (9.15)$$

Здесь $M(X)$ или μ — математическое ожидание; $f(x)$ — плотность вероятности.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx, \quad (9.16)$$

где $D(X)$ или σ^2 — дисперсия; μ — математическое ожидание; $f(x)$ — плотность вероятности.

Определение. Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной называется квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D(X)}, \quad (9.17)$$

где σ — среднее квадратическое отклонение; $D(X)$ — дисперсия.

Если случайная величина может принимать значения только на отрезке $[a, b]$, то в интегралах (9.15) и (9.16) пределы интегрирования принимают также равными a и b .

Формулы (9.15) и (9.16) аналогичны соответствующим формулам (9.1) и (9.2) для дискретной случайной величины, только суммирование заменяется интегрированием, а вероятности p_i заменяются плотностью вероятности $f(x)$.

Смысл числовых характеристик непрерывной случайной величины такой же, как у дискретной случайной величины. Математическое ожидание характеризует среднее ожидаемое значение случайной величины, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют средний разброс (рассеяние) случайной величины относительно математического ожидания.

Рассмотрим простейший пример распределения непрерывной случайной величины.

Пример 9.1 (равномерное распределение). Равномерным распределением называют такое распределение непрерывной случайной величины, при котором плотность вероятности постоянна внутри некоторого

отрезка $[a, b]$ и равна нулю вне его. Таким образом, плотность вероятности равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ C, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 9.6.

Постоянную C можно определить, пользуясь свойством 3 плотности вероятности (см. формулу (9.11)):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b C dx = C \cdot (b - a) = 1,$$

откуда $C = \frac{1}{b - a}$.

Функция распределения в рассматриваемом случае равна

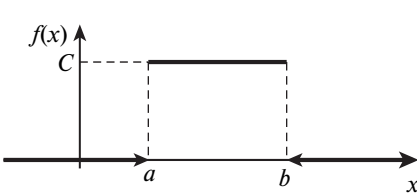


Рис. 9.6. График плотности вероятности $f(x)$ случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$. Стрелки на линиях при $x = a$ и $x = b$ означают, что соответствующие точки не принадлежат изображенным линиям

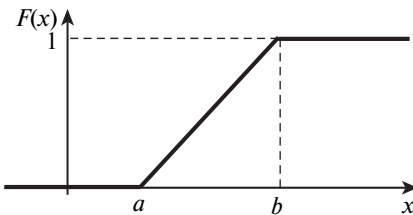


Рис. 9.7. График функции распределения случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Это нетрудно проверить, пользуясь определением плотности вероятности $f(x) = F'(x)$.

График функции распределения представлен на рис. 9.7.

Найдем числовые характеристики случайной величины с равномерным распределением. Математическое ожидание равно

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b - a} dx = \\ &= \frac{x^2}{2(b - a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

Как видно, математическое ожидание совпадает с серединой отрезка $[a, b]$.

Вычислим дисперсию, пользуясь определением (9.16):

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx.$$

Воспользуемся методом подстановки.

$$1. \text{ Введем новую переменную } t = x - \frac{a+b}{2}.$$

$$2. dx = dt.$$

$$3. x_1 = a, t_1 = \frac{a-b}{2};$$

$$x_2 = b, t_2 = \frac{b-a}{2}.$$

$$4. \sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2 dt = 2 \frac{1}{b-a} \frac{t^3}{3} \bigg|_0^{\frac{b-a}{2}} = \frac{2(b-a)^3}{3 \cdot 8} = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Среднее квадратическое отклонение для случайной величины с равномерным распределением оказывается несколько меньше половины длины отрезка $[a, b]$ (половина длины отрезка равна $(b-a)/2$). Это согласуется со смыслом среднего квадратического отклонения σ , которое равно среднему отклонению значений случайной величины относительно математического ожидания μ . В рассматриваемом случае μ совпадает с серединой отрезка, а половина длины отрезка представляет собой максимально возможное отклонение случайной величины относительно математического ожидания.

§ 9.4. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Закон распределения непрерывной случайной величины X называется *нормальным*, если плотность вероятности описывается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (9.18)$$

где μ — математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение.

Нормальный закон распределения называется также законом Гаусса по имени великого немецкого математика и физика Карла Гаусса, подробно исследовавшего этот закон. Мы рассмотрим нормальный закон распределения, поскольку многие случайные величины, встречающиеся в природе (в том числе в медицине и фармации), распределены приблизительно по нормальному закону с различными значениями μ и σ .

В том, что μ является математическим ожиданием, а σ — средним квадратическим отклонением, можно убедиться, подставив плотность вероятности (9.18) в определение μ и σ (формулы (9.15) и (9.16)) и вычислив соответствующие интегралы.

График функции $f(x)$ приведен на рис. 9.8. Этот график называется *кривой нормального распределения* или *кривой Гаусса*. Максимум кривой находится в точке $x_{\max} = \mu$. Действительно, в этой точке производная функции (9.18) равна нулю и изменяет свой знак с «+» на «−» при переходе через эту точку:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2}.$$

Знак производной определяется знаком скобки $(x - \mu)$, поскольку экспонента положительна при любых значениях x .

Максимальное значение плотности вероятности равно

$$f_{\max} = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{0}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \quad (9.19)$$

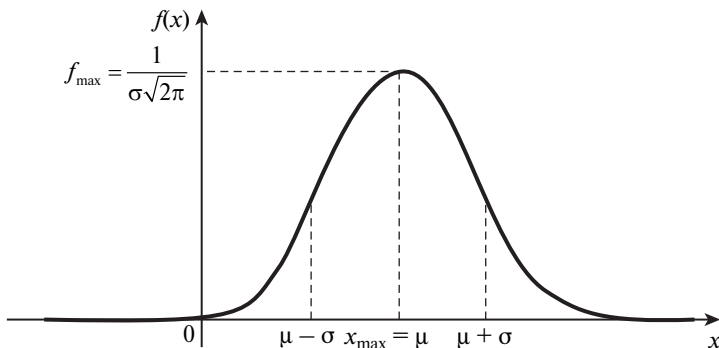


Рис. 9.8. График кривой нормального распределения (кривая Гаусса). Он симметричен относительно точки $x = \mu$

Найдем вторую производную функции $f(x)$:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right]. \quad (9.20)$$

Нетрудно видеть, что $f''(x)$ обращается в ноль в точках $x_1 = \mu - \sigma$ и $x_2 = \mu + \sigma$ и меняет свой знак при переходе через эти точки (знак $f''(x)$ определяется знаком выражения в квадратных скобках). Следовательно, точки $x_1 = \mu - \sigma$ и $x_2 = \mu + \sigma$ являются точками перегиба графика функции $f(x)$. График функции вогнутый при $x < \mu - \sigma$ и $x > \mu + \sigma$ (при этих значениях x вторая производная $f''(x) > 0$) и выпуклый при $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ (здесь $f''(x) < 0$).

Влияние параметров μ и σ на форму кривой нормального распределения

Нормальное распределение определяется двумя параметрами — математическим ожиданием μ и средним квадратическим отклонением σ . Различные случайные величины, распределенные по нормальному закону, имеют разные μ и σ . Посмотрим, как изменяется вид кривой нормального распределения при изменении отдельно параметров μ или σ .

При изменении математического ожидания μ и неизменном σ кривая нормального распределения, не изменяя своей формы, смещается вдоль оси Ox .

На рис. 9.9 изображены две кривые нормального распределения с разными μ и одинаковыми σ , причем $\mu_2 > \mu_1$.

Действительно, как было показано ранее, максимумы кривых находятся в точках $x_1 = \mu_1$ и $x_2 = \mu_2$, т. е. смещены вдоль оси Ox . То, что форма кривых одинакова, можно показать следующим образом. Переместим начало координат в точку $x_1 = \mu_1$. Для этого введем новую переменную $z = x - \mu_1$. При этом форма кривой будет описываться функцией плотности вероятности

$$f(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

Переместив начало координат в точку $x_2 = \mu_2$, получим точно такую же функцию для второй кривой, т. е. форма кривых одинакова.

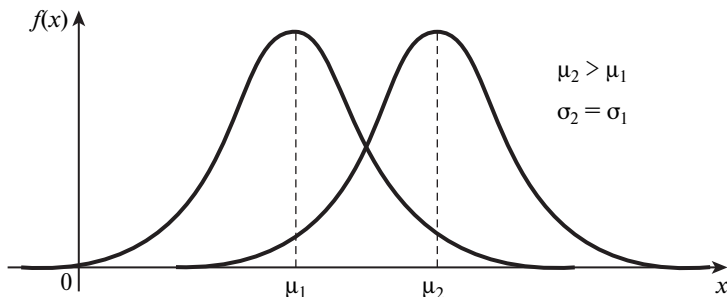


Рис. 9.9. Кривые нормального распределения с разными значениями μ и одинаковыми σ

Кривая нормального распределения имеет колоколообразный вид. Среднее квадратическое отклонение σ определяет форму кривой в следующем смысле. Чем больше значение σ , тем меньше максимальное значение $f(x)$, поскольку

$$f_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Одновременно при увеличении σ кривая становится более пологой.

Можно определить ширину кривой Гаусса как расстояние между двумя точками перегиба на ней. На рис. 9.10 это длины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 . Чем больше σ , тем длиннее отрезок, соединяющий точки перегиба, т. е. тем «шире» кривая. На рис. 9.10 изображены две кривые нормального распределения с разными значениями σ , но одинаковыми μ , причем $\sigma_2 > \sigma_1$.

Действительно, как было показано ранее, точки $x_1 = \mu - \sigma$ и $x_2 = \mu + \sigma$ являются точками перегиба кривой нормального распределения. Они находятся на расстоянии σ от точки максимума кривой $x_{\max} = \mu$. Таким образом, чем больше σ , тем дальше от максимума находятся точки перегиба, т. е. тем «шире» кривая. Заметим, что в соответствии со свойством плотности вероятности (9.11), площадь под кривой нормального распределения равна 1. Поэтому чем меньше максимальное $f_{\max}$, тем «шире» кривая.

Среднее квадратическое отклонение σ определяет среднее отклонение возможных значений случайной величины относительно математического ожидания. Таким образом, более широкая форма кривой при больших значениях σ наглядно показывает увеличение среднего отклонения значений случайной величины.

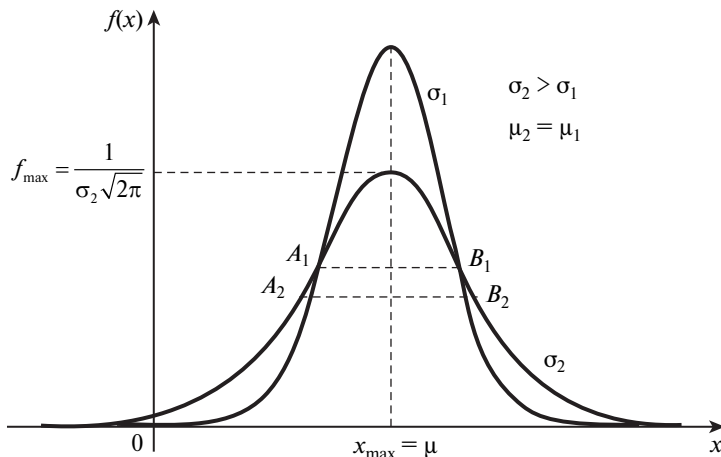


Рис. 9.10. Кривые нормального распределения с разными значениями σ и одинаковыми μ

Например, рост является непрерывной случайной величиной, распределенной приблизительно по нормальному закону в больших однородных группах людей. Для разных групп параметры распределения μ и σ могут быть разными. Так, математическое ожидание распределения роста девушек меньше математического ожидания распределения роста юношей в одной и той же, однородной в других отношениях, группе.

Вероятность попадания значения нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

С практической точки зрения важной является задача определения вероятности того, что в результате испытания или измерения значение случайной величины окажется внутри заранее заданного интервала.

Вероятность попадания значения нормально распределенной случайной величины в заданный интервал (a, b) равна:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right), \quad (9.21)$$

где $P(a < X < b)$ — вероятность того, что в результате испытания значение случайной величины X окажется в интервале $a < X < b$,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (9.22)$$

— функция Лапласа, значения которой приведены в табл. П1 (см. приложение); μ — математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение.

Нетрудно показать, что функция $\Phi(z)$ (9.22) нечетная, т. е. $\Phi(-z) = -\Phi(z)$. Этим свойством пользуются, когда при решении задач один или оба аргумента $\Phi(z)$ оказываются отрицательными (в табл. П1 приведены значения $\Phi(z)$ только для положительных z).

Пример 9.2. Полагая, что рост студентов в некотором городе распределен по нормальному закону с $\mu = 165$ см и $\sigma = 5$ см, найти вероятность того, что рост случайным образом выбранной студентки окажется в пределах от 160 до 175 см.

Решение. Искомая вероятность рассчитывается по формуле (9.21) с $a = 160$ см, $b = 175$ см:

$$\begin{aligned} P(160 < X < 175) &= \Phi\left(\frac{175-165}{5}\right) - \Phi\left(\frac{160-165}{5}\right) = \\ &= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185. \end{aligned}$$

Вывод формулы (9.21). Вычислим вероятность попадания значения нормально распределенной случайной величины в интервал (a, b) . Для этого воспользуемся формулой (9.9), подставляя в качестве $f(x)$ плотность вероятности нормального распределения (9.18):

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Сделаем в полученном интеграле замену переменных, вводя новую переменную $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Дифференциал $du = \frac{dx}{\sigma}$, $dx = \sigma du$, а новые нижний и верхний пределы интегрирования равны соответственно $\frac{a-\mu}{\sigma}$ и $\frac{b-\mu}{\sigma}$.

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались свойствами определенного интеграла (см. § 6.2).

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Эта функция называется *функцией Лапласа*. Она представляется в виде интеграла и не выражается через элементарные функции. Ее значения рассчитываются специальными методами и приведены в табл. П1 (см. приложение).

Окончательно получаем *вероятность попадания значения нормально распределенной случайной величины в заданный интервал*:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

где $P(a < X < b)$ — вероятность того, что в результате испытания значение случайной величины X окажется в интервале $a < X < b$; $\Phi(z)$ — функция Лапласа (9.22); μ — математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение.

Правило «трех сигм»

Рассчитаем вероятность того, что в результате испытания значение случайной величины, распределенной по нормальному закону, окажется в интервале от $\mu - 3\sigma$ до $\mu + 3\sigma$.

Расчет проводим по формуле (9.21) с $a = \mu - 3\sigma$, $b = \mu + 3\sigma$:

$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= \Phi\left(\frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) + \Phi(3) = 2\Phi(3) \approx 0,9973. \end{aligned}$$

Как видно, вероятность оказалась очень близкой к 1, т. е. при испытаниях или измерениях нормально распределенной случайной величины ее значения практически всегда (с вероятностью $P = 0,9973$) попадают в интервал $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$. Этот интервал иногда называют «трехсигмовым». Таким образом, можно сформулировать следующее правило.

Правило «трех сигм». Значения случайной величины, распределенной по нормальному закону, практически всегда лежат в интервале от $\mu - 3\sigma$ до $\mu + 3\sigma$, где μ — математическое ожидание, а σ — среднее квадратическое отклонение.

Полуширина (половина ширины) интервала равна 3σ . Расчет показывает, что для аналогичного интервала с полушириной 2σ вероятность попадания случайной величины в соответствующий интервал от $\mu - 2\sigma$ до $\mu + 2\sigma$ не так близка к 1. Она равна $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9544$. Поэтому выбирают интервал с полушириной 3σ и формулируют правило трех сигм. На рис. 9.11 видно, что в точках $x = \mu - 3\sigma$ и $x = \mu + 3\sigma$ плотность вероятности $f(x)$ близка к нулю.

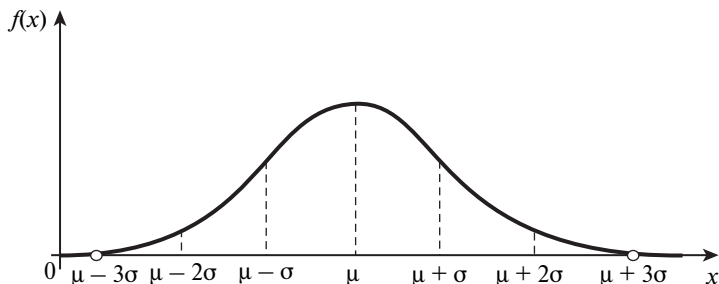


Рис. 9.11. Иллюстрация правила «трех сигм»

На практике правило «трех сигм» применяют для выявления того, является ли закон распределения случайной величины нормальным или нет. Если все полученные значения случайной величины попадают в интервал $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$, то есть основания полагать, что закон распределения нормальный. Если некоторые значения оказываются вне этого интервала, значит, закон распределения не является нормальным. Как рассчитать неизвестные значения μ и σ , будет показано в главе 10.

ЗАДАЧИ

9.1. Число девушек в двадцати учебных группах равно соответственно 8, 5, 7, 8, 4, 6, 7, 5, 8, 6, 9, 6, 7, 5, 7, 4, 8, 4, 5, 7. Число девушек в группе, выбранной наугад, является случайной величиной. Составить ее закон распределения. Найти его моду.

9.2. На экзамене по математике студенты получили 13 пятерок, 38 четверок, 33 тройки. Составить закон распределения случайной величины, которой является оценка, полученная на экзамене наугад выбранным студентом. Найти его моду.

9.3. Случайная величина имеет закон распределения, представленный табл. 9.6. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Таблица 9.6. Данные к задаче 9.3

X	2	3	4	5
p	0,1	0,3	0,4	0,2

9.4. Игральный кубик имеет 6 одинаковых граней с числом очков от 1 до 6. Составить закон распределения для случайной величины, представляющей собой число очков, выпадающих при бросании кубика. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

9.5. Пусть случайная величина равна суммарному числу очков, выпавших на двух игровых кубиках, брошенных одновременно. Ее можно рассматривать как сумму двух независимых случайных величин, каждая из которых равна числу очков, выпавших на одном кубике. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, представляющей собой суммарное число очков, выпавших на двух игровых кубиках одновременно.

9.6. Функция распределения случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти ее плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность попадания данной случайной величины в интервал от 0 до 1.

9.7. Функция распределения случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}; \\ a \sin x + b & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти ее плотность вероятности, параметры a и b , математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

9.8. Случайная величина распределена по нормальному закону с $\mu = 3$ и $\sigma = 2$. Написать ее плотность вероятности.

9.9. Полагая, что концентрация эритроцитов в крови здоровых людей подчиняется нормальному закону распределения с $\mu = 4,55 \cdot 10^6$ (единиц в микролитре) и $\sigma = 0,275 \cdot 10^6$, найти вероятность того, что у обследуемого пациента концентрация эритроцитов окажется в пределах от $4,0 \cdot 10^6$ до $4,55 \cdot 10^6$.

9.10. Найти вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, в результате испытания примет значение в интервале от $\mu - \sigma$ до $\mu + \sigma$, где μ — математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение.