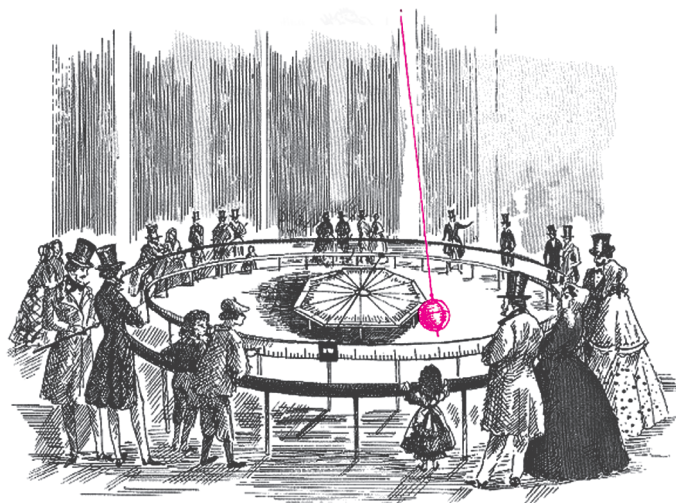


Глава 1

Механические колебания



***Колебаниями** называют движения или процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени.*

Таким свойством могут обладать явления и процессы различной природы: механической, электрической, тепловой, биологической. Например, меняют положение в пространстве маятник часов, струны музыкальных инструментов, изменяются величины напряжения в электрическом контуре и суточная температура воздуха, сокращается сердечная мышца, возникают нервные импульсы.

Всем колебаниям независимо от их природы присущи некоторые общие закономерности.

Одним из видов колебаний являются механические колебания. В зависимости от характера воздействия на колебательную систему различают свободные, вынужденные и автоколебания.

Свободные — колебания, которые возникают в системе под действием внутренних сил и происходят после того, как система тем или иным способом была выведена из состояния равновесия. Если на

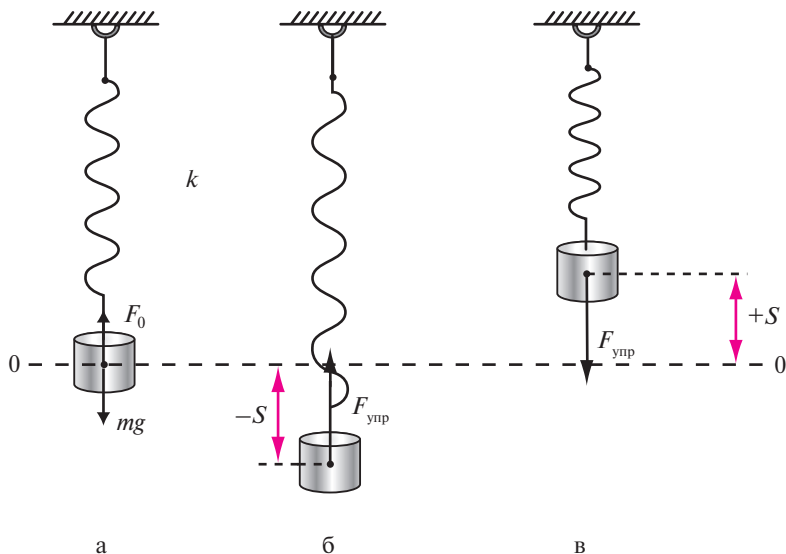


Рис. 1.1. Пружинный маятник: а — положение равновесия ($F_0=mg$); б — пружина растянута, смещение тела $-S$; в — пружина сжата, смещение тела $+S$

такую систему не действуют никакие внешние силы (вынуждающие или силы трения), то такие колебания совершаются по *гармоническому закону*. Если свободные колебания совершаются при действии сил трения, то они всегда являются *затухающими*.

Вынужденные — колебания, совершаемые системой под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания — всегда вынужденные колебания, но моменты воздействия внешней вынуждающей силы регулируются самой колеблющейся системой.

1.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармонические колебания — это самый простой вид колебаний, характеризующийся тем, что смещение колеблющейся точки совершается по закону синуса либо косинуса.

Рассмотрим вертикально расположенную пружину, один конец которой закреплен, а на другой подвешено тело массой m (рис. 1.1, а).

В этом положении начальная упругая сила F_0 и сила тяжести mg уравновешивают друг друга и тело находится в состоянии покоя. Если пружину растянуть (рис. 1.1, б) или сжать (рис. 1.1, в) на некоторое расстояние S , то на тело будет действовать сила упругости, вызванная смещением тела.

Для небольших деформаций пружины справедлив закон Гука:

$$F_{\text{упр}} = -ks,$$

где k — коэффициент упругости пружины; s — смещение тела относительно положения равновесия. Упругая сила всегда направлена в сторону положения равновесия и противоположно смещению тела. Поэтому в формуле ставится знак « $-$ ». Так как смещения тела отсчитываются от положения равновесия (уровень 0—0 на рис. 1.1), то постоянную составляющую смещения за счет силы тяжести mg можно не учитывать.

Тогда, с учетом второго закона Ньютона, можно записать уравнение движения тела:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks. \quad (1.1)$$

Введем замену:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.2)$$

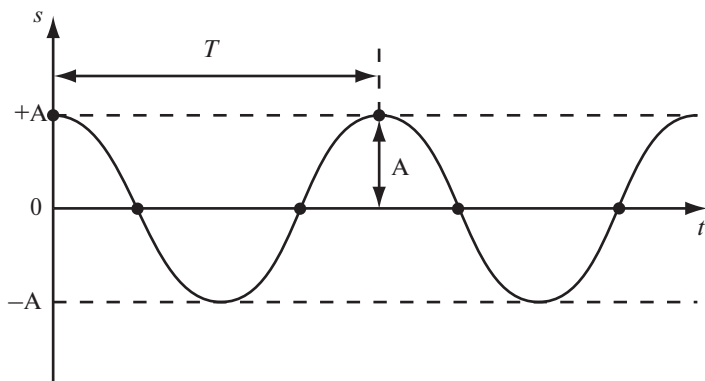


Рис. 1.2. График гармонического колебания: s — смещение тела; t — время; A — амплитуда колебаний; T — период колебаний

и, разделив обе части уравнения (1.1) на m , получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3):

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.4)$$

где A — амплитуда колебания — максимальное смещение тела от положения равновесия;

ω_0 — круговая частота колебаний, $\omega_0 = 2\pi\nu$;

ν — частота в герцах [Гц, с^{-1}] — количество колебаний за 1 с;

$\omega_0 t + \varphi_0$ — текущая фаза колебаний; она определяет положение тела на данный (любой выбранный) момент времени;

φ_0 — начальная фаза колебания — определяет положение тела в момент $t = 0$.

Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от условий, при которых началось движение тела, в частности от положения тела и его скорости в момент $t = 0$.

Время, за которое совершается одно полное колебание, называется периодом колебаний T .

Период и частота связаны соотношением:

$$T = 1/\nu \text{ или } T = 2\pi/\omega_0, \quad (1.5)$$

где ω_0 — собственная частота гармонического колебания.

Эта величина имеет глубокий физический смысл. Из выражения (1.2) следует, что ω_0 определяется только параметрами колебательной системы, в данном случае коэффициентом упругости пружины k и массой прикрепленного к ней тела m . Важно, что собственная частота не зависит от того, как в начальный момент $t = 0$ тело было выведено из равновесия: дали ему большое или малое начальное смещение; сильно или слабо толкнули тело в этот момент. Во всех случаях тело будет совершать колебания с собственной частотой ω_0 .

Энергия колебательной системы (гармонического осциллятора) складывается из потенциальной $E_{\text{п}}$ и кинетической $E_{\text{к}}$ энергий:

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \frac{ks^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (1.6)$$

Тогда, с учетом (1.4), мгновенное значение потенциальной энергии:

$$E_{\text{п}} = \frac{kA^2}{2} \cos^2 (\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.7)$$

а мгновенное значение кинетической энергии:

$$E_{\text{к}} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2 (\omega_0 t + \varphi_0).$$

Учитывая (1.2) последнее выражение, можно представить:

$$E_{\text{к}} = \frac{kA^2}{2} \sin^2 (\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.8)$$

Тогда значение полной энергии системы из (1.6; 1.7 и 1.8):

$$E = \frac{kA^2}{2} [\cos^2 (\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2 (\omega_0 t + \varphi_0)].$$

Из курса тригонометрии известно, что выражение в квадратных скобках равно единице, а следовательно:

$$E = \frac{kA^2}{2}. \quad (1.9)$$

Из формул (1.7) и (1.8) следует, что потенциальная и кинетическая энергии меняются во времени, и их величины смещены по фазе: когда потенциальная энергия максимальна, кинетическая равна нулю и наоборот, когда потенциальная энергия равна нулю, кинетическая — максимальна. Однако полная энергия с учетом (1.2, 1.6):

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}, \quad (1.10)$$

остается постоянной $E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \text{const.}$