И.В. Павлушков,
Л.В. Розовский, И.А. Наркевич

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

Министерство образования и науки РФ

Рекомендовано ГБОУ ДПО «Российская медицинская академия последипломного образования» в качестве учебника в образовательных учреждениях, реализующих образовательные программы высшего профессионального образования по учебной дисциплине «Математика»

Регистрационный номер рецензии 31 от 19 февраля 2013 года
ФГАУ «Федеральный институт развития образования»

Москва
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
«ГЭОТАР-Медиа»
2013

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. ФУНКЦИИ

1.1.1. Определение функции, числовых промежутков и окрестности точек

Одним из основных математических понятий является понятие функции, устанавливающее зависимость между элементами двух множеств.

Определение. Пусть X, Y — некоторые множества, элементами которых являются некоторые числа. Если каждому числу $x \in X$ по некоторому закону или правилу f ставится в соответствие число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана числовая функция f, и записывают эту функциональную зависимость формулой $y = f(x)$ или, более наглядно, в виде диаграммы:

$$X \xrightarrow{f} Y. \tag{1.1}$$

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная y — *зависимой переменной* (от x) или *функцией*.

Множество X — область изменения аргумента — называется *областью определения функции* (ООФ). Множество Y, содержащее все значения, которые принимает y, *называется областью изменения функции*.

При дальнейшем изложении множества X и Y часто оказываются конечными или бесконечными промежутками.

Конечные промежутки:

- открытый интервал, или просто интервал $(a; b)$ — множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, или $(a; b) \Leftrightarrow (a < x < b)$, где $\Leftrightarrow$ — знак эквивалентности;
- замкнутый интервал (или отрезок) $[a; b]$: $[a; b] \Leftrightarrow (a \leqslant x \leqslant b)$;
- полуоткрытые интервалы $(a; b]$ и $[a; b)$: $(a; b] \Leftrightarrow (a < x \leqslant b)$ и $[a; b) \Leftrightarrow (a \leqslant x < b)$ соответственно.

Бесконечные промежутки:

- $(-\infty, +\infty) = R$ — множество всех вещественных чисел, т. е. $R \Leftrightarrow (-\infty < x < +\infty)$; аналогично, $(a; +\infty) \Leftrightarrow (a < x < +\infty)$ и т. д.

Числа a, b называются соответственно *левым* и *правым концами* этих промежутков.

Символы $-\infty$ и $+\infty$ — не числа, а обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси влево и вправо от начала 0.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). *Окрестностью точки* x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0, интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, симметричный относительно x_0, называется ε-*окрестностью точки* x_0 (рис. 1.1).

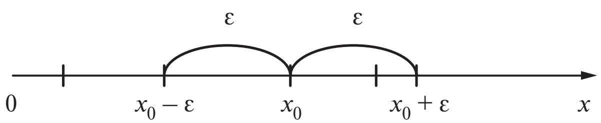

Рис. 1.1. ε-окрестность точки x_0

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то справедливы неравенства

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

что равносильно

$$|x - x_0| < \varepsilon.$$

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ можно найти, подставив a вместо аргумента: $f(a)$. При этом a может быть как буквенным выражением, числом, так и некоторой функцией, например $\varphi(t)$. В последнем случае $f(\varphi(t))$ будет сложной функцией, с ней мы ознакомимся в п. 1.1.3.

Пример 1. Найти область определения и область значений функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение. Область определения этой функции состоит из всех x, для которых она имеет смысл. Таким образом, $X = \{|x| \leqslant 1\} \Leftrightarrow [-1; 1]$, $Y = [0; 1]$, т. е. $\left[-1; 1\right] \xrightarrow{f} [0; 1]$.

Пример 2. Найти область определения и область значений функции

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Решение. Здесь независимая переменная n принимает целые положительные значения $n \in N = \{1, 2, ...\}$, следовательно, y является функцией натурального аргумента и вычисляется по заданной формуле $Y = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \left(\frac{1}{2}\right)^n, ...\right\}$, $\mathbf{N} \xrightarrow{f} Y$.

Пример 3. При $\varepsilon = 0{,}1$ построить ε-окрестность точки $x_0 = 2$.

Решение. По определению ε-окрестностью точки $x_0 = 2$ будет интервал $|x - 2| < 0{,}1$ или $-0{,}1 < x - 2 < 0{,}1 \Rightarrow 1{,}9 < x < 2{,}1$ (рис. 1.2).

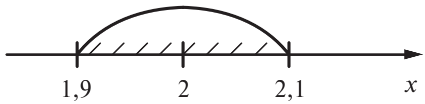

Рис. 1.2. Интервал $|x - 2| < 0{,}1$

Самостоятельная работа

1. Построить интервалы изменения переменной x, удовлетворяющей неравенствам:

1) $|x| < 4$; 2) $x^2 \leqslant 9$;
3) $|x - 4| < 1$; 4) $-1 < x - 3 \leqslant 2$;
5) $x^2 > 9$; 6) $(x - 2)^2 \leqslant 4$.

2. Найти области определения функций:

1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

3) $y = \sqrt{4x - x^2}$; 4) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4 + x}$;

5) $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$; 6) $y = -\sqrt{2\sin x}$;

7) $y = -\frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$; 8) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3 - x}$.

3. Вычислить значения функций в заданных точках:

1) $f(x) = x^2 - x + 1$; $f(2)$, $f(a+1)$;

2) $\varphi(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$; $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$;

3) $F(x) = x^2$; $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$, $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$.