

А.Г. Луканкин

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК ДЛЯ УЧАЩИХСЯ УЧРЕЖДЕНИЙ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Министерство образования и науки РФ

Рекомендовано федеральным государственным автономным учреждением (ФГАУ) «Федеральный институт развития образования» в качестве учебника для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих программы начального и среднего профессионального образования по всем профессиям и специальностям по учебной дисциплине «Математика»

Регистрационный номер рецензии 262 от 14 июня 2012 года
ФГАУ «Федеральный институт развития образования»



Москва
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
«ГЭОТАР-Медиа»
2012

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я722
Л 84

Луканкин А. Г.

Л84 Математика : учеб. для учащихся сред. проф. образования / А. Г. Луканкин. — М. : ГЭОТАР-Медиа, 2012. — 320 с.

ISBN 978-5-9704-2282-3

Книга является интегрированным учебником математики, включающим учебный материал по арифметике, алгебре и началам анализа, теории вероятностей и математической статистике. Учебник построен так, что позволяет повторить, систематизировать и обобщить учебный материал по курсу математики основной школы. В целях уровневой дифференциации каждая тема представлена двумя блоками: сначала следует теоретический материал, иллюстрирующийся элементарными примерами, а затем, как правило, рассматривается его применение при решении типичных задач и задач прикладного и практического характера. В учебник включен материал для упражнений и контрольные вопросы.

Учебный курс разработан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования.

Учебник «Математика» предназначен для учащихся, поступивших в учреждения среднего профессионального образования после окончания основной школы, и осваивается ими в течение первых двух лет обучения.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я722

Права на данное издание принадлежат ООО Издательская группа «ГЭОТАР-Медиа». Воспроизведение и распространение в каком бы то ни было виде части или целого издания не могут быть осуществлены без письменного разрешения ООО Издательская группа «ГЭОТАР-Медиа».

© Луканкин А.Г., 2012

© ООО Издательская группа «ГЭОТАР-Медиа», 2012

© ООО Издательская группа «ГЭОТАР-Медиа»,
оформление, 2012

ISBN 978-5-9704-2282-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	11
Условные обозначения	11
ГЛАВА 1. Числа, числовые и буквенные выражения.....	13
1.1. Натуральные числа и число нуль.....	13
1.1.1. Понятие натурального числа	13
1.1.2. Действия над натуральными числами.....	14
1.1.3. Наименьшее общее кратное. Наибольший общий делитель.....	18
1.2. Дроби	21
1.2.1. Доли	21
1.2.2. Обыкновенные дроби	21
1.2.3. Действия сложения и вычитания дробей с одинаковыми (равными) знаменателями	22
1.2.4. Действия сложения и вычитания дробей с различными знаменателями	23
1.2.5. Умножение и деление дробей.....	25
1.2.6. Десятичные дроби	26
1.2.7. Проценты.....	27
1.2.8. Пропорции	29
1.3. Множество. Операции над множествами	30
1.3.1. Множество и его элементы. Подмножества	30
1.3.2. Пересечение множеств.....	32
1.3.3. Объединение множеств.....	33
1.3.4. Вычитание множеств. Дополнение до множества.....	33
1.3.5. Прямое произведение двух множеств	34
1.3.6. Законы действий	34
1.3.7. Правило суммы и произведения	34
1.4. Множество действительных чисел	36
1.4.1. Целые числа.....	36
1.4.2. Рациональные числа	36
1.4.3. Представление рациональных чисел десятичными дробями	38
1.4.4. Рациональные числа и бесконечные периодические десятичные дроби	39
1.4.5. Действительные числа	43
1.4.6. Действия над действительными числами	44

1.4.7. Абсолютное значение (модуль) действительного числа	45
Контрольные вопросы	46
1.5. Частные случаи числовых множеств	47
1.5.1. Координатная ось и числовая прямая	47
1.5.2. Числовые промежутки	48
1.5.3. Ограниченные и неограниченные числовые множества	49
1.5.4. Числовая (координатная) плоскость	50
1.6. Множество комплексных чисел	51
1.6.1. Комплексные числа	51
1.6.2. Модуль комплексного числа	54
1.6.3. Комплексная плоскость. Аргумент комплексного числа	54
1.7. Приближенные вычисления	55
1.7.1. Абсолютная погрешность	55
1.7.2. Граница абсолютной погрешности	56
1.7.3. Относительная погрешность	57
1.7.4. Округление числа	58
1.8. Числовые выражения	59
1.8.1. Понятие числового выражения	59
1.8.2. Порядок выполнения действий	59
1.8.3. Свойства (законы) арифметических действий	60
ГЛАВА 2. Алгебраические выражения и их преобразования	64
2.1. Алгебраические выражения	64
2.1.1. Понятие алгебраического выражения	64
2.1.2. Алгебраическая сумма	64
2.1.3. Степень с натуральным показателем	65
2.2. Одночлены и многочлены	66
2.2.1. Одночлены	66
2.2.2. Многочлены	66
2.2.3. Действия над одночленами и многочленами	67
2.3. Преобразование алгебраических выражений	68
2.3.1. Формулы сокращенного умножения	68
2.3.2. Разложение многочлена на множители	68
2.3.3. Квадратный трехчлен, его разложение на множители ..	68
2.4. Алгебраические дроби	69
2.4.1. Понятие алгебраической дроби	69
2.4.2. Основное свойство алгебраической дроби	69
2.4.3. Действия с алгебраическими дробями	70

2.5. Степени и корни	72
2.5.1. Степень с целым показателем	72
2.5.2. Корень натуральной степени из числа	73
2.5.3. Степень с рациональным показателем	75
2.6. Логарим действительного числа	76
2.6.1. Понятие логарифма числа	76
2.6.2. Основные свойства логарифма	77
2.6.3. Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию	78
2.7. Тригонометрические формулы	79
2.7.1. Числовая окружность	79
2.7.2. Числовая окружность на координатной плоскости	83
2.7.3. Синус и косинус действительного числа	88
2.7.4. Тангенс и котангенс действительного числа	92
2.7.5. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс действительного числа	95
ГЛАВА 3. Функции, их свойства и графики	100
3.1. Функции	100
3.1.1. Понятие функции	100
3.1.2. Функции и отображения	101
3.1.3. Числовые функции	101
3.1.4. Способы задания функции	102
3.1.5. Функция, обратная к данной функции	104
3.1.6. Четные и нечетные функции	105
3.1.7. Периодические функции	107
3.1.8. Монотонные функции	108
3.1.9. Ограниченные функции	109
3.1.10. Чтение графиков функций	110
3.1.11. Простейшие преобразования графиков функций	111
3.2. Элементарные функции, их свойства и графики	114
3.2.1. Прямая пропорциональность	114
3.2.2. Обратная пропорциональность	115
3.2.3. Линейная функция	118
3.2.4. Квадратичная функция	119
3.2.5. Дробно-линейная функция	122
3.2.6. Функция $y=\sqrt{x}$	124
3.3. Степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции	126
3.3.1. Степенная функция	126
3.3.2. Показательная функция	129

3.3.3. Логарифмическая функция	130
3.3.4. Тригонометрические функции	132
3.3.5. Обратные тригонометрические функции действительного аргумента	135
3.4. Сложная функция. Многочлены. Рациональные функции. Класс элементарных функций	139
3.4.1. Сложная функция	139
3.4.2. Многочлены	139
3.4.3. Рациональные функции.....	140
3.4.4. Алгебраические функции. Трансцендентные функции	140
3.4.5. Элементарные функции.....	140
Глава 4. Уравнения и неравенства	142
4.1. Уравнения с одним неизвестным	142
4.1.1. Определение уравнения. Корень уравнения.....	142
4.1.2. Равносильность уравнений	143
4.1.3. Рациональные уравнения	144
4.1.4. Иррациональные уравнения.....	147
4.1.5. Показательные уравнения	150
4.1.6. Логарифмические уравнения.....	152
4.2. Уравнения и системы уравнений с двумя неизвестными.....	155
4.2.1. Определения уравнения и системы уравнений с двумя неизвестными. Способы их решения	155
4.2.2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными	157
4.3. Неравенства	161
4.3.1. Числовое неравенство	161
4.3.2. Операции над неравенствами.....	162
4.3.3. Неравенства с одним неизвестным	162
4.3.4. Квадратные неравенства	163
4.3.5. Рациональные неравенства.....	164
4.3.6. Метод интервалов.....	166
4.3.7. Системы неравенств с одним неизвестным.....	169
4.4. Простейшие тригонометрические уравнения.....	170
4.4.1. Уравнение $\sin x = a$	171
4.4.2. Уравнение $\cos x = a$	173
4.4.3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$	175
4.4.4. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$	176

Глава 5. Начала математического анализа	179
5.1. Последовательности.....	179
5.1.1. Понятие числовой последовательности.....	179
5.1.2. Способы задания последовательностей	180
5.1.3. Ограниченные и монотонные последовательности	181
5.1.4. Понятие арифметической прогрессии	182
5.1.5. Свойства арифметической прогрессии	183
5.1.6. Понятие геометрической прогрессии	185
5.1.7. Свойства геометрической прогрессии	186
5.2. Предел последовательности.....	189
5.2.1. Предел числовой последовательности.	
Сходящиеся и расходящиеся последовательности	189
5.2.2. Бесконечно малые последовательности.....	191
5.2.3. Теоремы о пределах последовательностей, связанные с арифметическими действиями и неравенствами.....	193
5.2.4. Бесконечно большие последовательности.....	194
5.2.5. Существование предела монотонной последовательности	195
5.3. Предел функции.....	196
5.3.1. Предел функции в точке	196
5.3.2. Теоремы о пределах функций, связанные с арифметическими действиями и неравенствами	198
5.3.3. Односторонние пределы	199
5.3.4. Предел функции при $x \rightarrow \pm\infty$	200
5.3.5. Бесконечные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.....	201
5.4. Непрерывность функции	203
5.4.1. Непрерывность функции в точке	203
5.4.2. Свойства функций, непрерывных в точке	204
5.4.3. Непрерывность функции на множестве	205
5.4.4. Точки разрыва и их классификация.....	206
5.4.5. Непрерывность элементарных функций	206
5.4.6. Особые (замечательные) пределы	207
5.5. Производная.....	208
5.5.1. Производная функции	208
5.5.2. Физический и геометрический смысл производной.....	209
5.5.3. Вычисление производной на основе ее определения	210
5.5.4. Непрерывность дифференцируемой функции	211
5.5.5. Уравнение касательной к графику функции	212

5.6. Производная суммы, разности, произведения и частного функций. Производная сложной функции	214
5.6.1. Производная суммы и разности функций	214
5.6.2. Производная произведения функций	214
5.6.3. Производная частного двух функций	215
5.6.4. Производная сложной функции.....	216
5.6.5. Производные некоторых элементарных функций	217
5.7. Производные высших порядков.....	218
5.7.1. Вторая производная	218
5.7.2. Физический смысл второй производной	219
5.8. Приложение производной к исследованию функций.....	220
5.8.1. Интервалы монотонности	220
5.8.2. Экстремумы функции	224
5.9. Построение графиков функций	227
5.9.1. Выпуклость графика функции.....	227
5.9.2. Асимптоты графика.....	228
5.9.3. Построение графика функции.....	230
5.10. Задачи на наибольшее и наименьшее значения функции	232
5.10.1. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	232
5.10.2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений в прикладных задачах	233
5.11. Дифференциал функции.....	235
5.11.1. Определение дифференциала функции	235
5.11.2. Геометрический смысл дифференциала	236
5.11.3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям	237
5.12. Неопределенный интеграл и его свойства	238
5.12.1. Первообразная и неопределенный интеграл	238
5.12.2. Таблица простейших интегралов.....	240
5.12.3. Непосредственное интегрирование.....	240
5.13. Методы интегрирования	241
5.13.1. Метод замены переменной	241
5.13.2. Метод интегрирования по частям	243
5.13.3. «Неберущиеся» интегралы	243
5.14. Определенный интеграл.....	244
5.14.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.....	244
5.14.2. Понятие определенного интеграла.....	245
5.14.3. Основные свойства определенных интегралов	246

5.15. Основные теоремы об определенном интеграле.....	248
5.15.1. Теорема о среднем	248
5.15.2. Определенный интеграл с переменным верхним пределом.....	249
5.15.3. Формула ньютона—лейбница.....	250
5.16. Методы вычисления определенных интегралов	252
5.16.1. Метод замены переменной интегрирования (метод подстановки)	252
5.16.2. Метод интегрирования по частям	254
5.17. Практические приложения определенного интеграла	255
5.17.1. Вычисление площадей плоских фигур.....	255
5.17.2. Вычисление длины дуги плоской кривой	256
5.17.3. Вычисление объемов тел вращения.....	258
Глава 6. Элементы теории вероятностей	261
6.1. Основные понятия комбинаторики	261
6.1.1. Примеры простейших комбинаторных задач. Понятие выборки	261
6.1.2. Размещения и перестановки.....	264
6.1.3. Сочетания	266
6.1.4. Формула ньютона.....	268
6.2. Случайные события. Вероятность события	270
6.2.1. Случайные события и операции над ними	270
6.2.2. Опыт с равновероятными исходами. Классическое определение вероятности события	274
6.3. Основные теоремы и формулы теории вероятностей	278
6.3.1. Теорема сложения	278
6.3.2. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий	280
6.3.3. Формула полной вероятности	285
6.3.4. Формулы байеса	287
6.3.5. Формула бернулли.....	289
6.4. Случайные величины.....	292
6.4.1. Закон распределения случайной величины	292
6.4.2. Математическое ожидание случайной величины.....	293
6.4.3. Дисперсия случайной величины	295
6.4.4. Среднее квадратическое отклонение	297
6.4.5. Биноминальное распределение	298
6.4.6. Понятие о законе больших чисел.....	299

Глава 7. Элементы математической статистики	302
7.1. Основные понятия и задачи математической статистики	302
7.1.1. Предмет математической статистики.....	302
7.1.2. Выборки и выборочные распределения	303
7.1.3. Графические изображения выборки. Полигон и гистограмма	307
7.1.4. Выборочные характеристики.....	309
7.2. Статистические оценки неизвестных параметров.....	312
7.2.1. Точечные оценки. Несмещенность и состоятельность оценок	312
7.2.2. Интервальные оценки.....	314
7.3. Обработка результатов измерений методом наименьших квадратов	316

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник «Математика» предназначен для учащихся, поступивших в учреждения среднего профессионального образования после окончания основной школы, и осваивается ими в течение первых двух лет обучения.

Учебный курс разработан в соответствии с Государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования.

Книга является интегрированным учебником математики, включающим учебный материал по арифметике, алгебре и началам анализа, теории вероятностей и математической статистике. Учебник построен так, что позволяет повторить, систематизировать и обобщить учебный материал по математике основной школы. В целях реализации уровневой дифференциации каждая тема представлена двумя блоками: теоретический материал с иллюстрацией его на элементарных примерах, а затем, как правило, рассматривается его применение для решения типичных задач и задач прикладного и практического характера.

В учебник включен материал для упражнений и контрольные вопросы.

В учебнике выдержана преемственность с действующей школьной программой по математике как в подходах к изложению теоретического материала, так и в вопросах, связанных с использованием терминологии и обозначений.

Работа над учебником начиналась в соавторстве с Геннадием Лавровичем Луканкиным (1937–2006), светлой памяти которого посвящается эта книга.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ▼ — начало решения задачи или примера
- ▲ — окончание решения задачи или примера
- — начало и окончание обоснования математического утверждения или вывода формулы

ЧИСЛА, ЧИСЛОВЫЕ И БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1.1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ЧИСЛО НУЛЬ

1.1.1. Понятие натурального числа

Представление о числах у человечества складывалось постепенно, под влиянием требований практики.

Так, натуральные числа появились в связи с необходимостью подсчета предметов, или вещей, или объектов, или явлений. Например, необходимо подсчитать число времен года — их оказалось четыре (зима, весна, лето, осень). Или другой пример: пересчитав книги, стоящие в книжном шкафу, мы говорим, что на первой полке 15 книг, на второй — 20 и т.д. Если же одна из полок книжного шкафа оказалась свободной от книг (на ней могут лежать тетради, альбомы или другие предметы), то мы говорим, что на полке 0 (нуль) книг.

Таким образом, *натуральные числа* — это числа, получающиеся при счете.

Натуральный ряд чисел: $1, 2, 3 \dots, n - 1, n, n + 1 \dots$ — бесконечен. Начинается натуральный ряд с 1, и каждый последующий член ряда на 1 больше предыдущего. В десятичной системе счисления для записи любого натурального числа достаточно десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например, число одна тысяча девятьсот тридцать семь записывается в следующем виде — 1937, а число две тысячи четыре — как 2004.

Очень важно уметь представлять натуральные числа в виде суммы разрядных слагаемых:

$$1937 = 1000 + 900 + 30 + 7;$$

$$2004 = 2000 + 4.$$

1.1.2. Действия над натуральными числами

Для натуральных чисел определены следующие действия:

- действия первой ступени — сложение и вычитание;
- действия второй ступени — умножение и деление;
- действия третьей ступени — возведение в степень и извлечение корня.

Сложение. Законы сложения

Сумма: $a + b = c$; a и b — слагаемые; c — значение суммы.

В частности:

$$a + 0 = a;$$

$$0 + a = a;$$

$$0 + 0 = 0.$$

Сложение — действие, при котором по заданным слагаемым находят значение суммы.

Законы сложения:

а) переместительный закон: $a + b = b + a$;

б) сочетательный закон: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.

Пример 1.1. Сложим числа 1937 и 2004 в столбик.



$$\begin{array}{r} +1937 \\ +2004 \\ \hline 3941 \end{array}$$

Пояснение. При сложении в столбик числа записывают так, чтобы одноименные разряды записывались друг под другом; а сложение начинают с разряда единиц: $7 + 4 = 11$ — один записывают и один в уме, и т.д.



Пример 1.2. Сложим числа 2001 и 11 952, предварительно записав их в виде разрядных слагаемых и применяя законы сложения.



$$2001 = 2000 + 1;$$

$$11\,952 = 10\,000 + 1000 + 900 + 50 + 2;$$

$$2001 + 11\,952 = 10\,000 + 3000 + 900 + 50 + 3 = 13\,963.$$



Вычитание. Законы вычитания

Разность: $a - b = c$, где a — уменьшаемое, b — вычитаемое; c — значение разности.

Вычитание — действие, обратное сложению: $a - b = c$, если $c + b = a$.

В частности:

$$a - 0 = a;$$

$$a - a = 0;$$

$$0 - 0 = 0.$$

Вычитание — действие, при котором по заданным уменьшаемому и вычитаемому находят значение разности.

Свойства вычитания:

а) вычитание разности: $a - (b - c) = (a - b) + c$;

б) вычитание суммы: $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Пример 1.3. Найдём разность чисел: а) 39 574 и 12 930; б) 4725 и 396.

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} 39574 \\ -12930 \\ \hline 26644 \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} 4725 \\ -396 \\ \hline 4329 \end{array} \end{array}$$

Пример 1.4. Вычислим разность, используя для упрощения свойства вычитания: а) $318 - (18 - 5)$; б) $318 - (18 + 5)$; в) $500 - 12 - 88$.

а) $318 - (18 - 5) = (318 - 18) + 5 = 305$;

б) $318 - (18 + 5) = (318 - 18) - 5 = 295$;

в) $500 - 12 - 88 = 500 - (12 + 88) = 500 - 100 = 400$.

Умножение. Законы умножения

Умножение: $a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ равных слагаемых}}$.

Произведение: $a \cdot b = c$, где a и b — множители, c — значение произведения.

Умножение — действие, при котором по заданным множителям находят значение произведения.

Законы умножения:

а) переместительный закон: $a \cdot b = b \cdot a$;

б) сочетательный закон: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

в) распределительный закон относительно сложения:
 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

г) распределительный закон относительно разности:
 $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

В частности:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$$

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0.$$

Пример 1.5. Найдем произведение чисел, используя для упрощения законы умножения: а) $845 \cdot 25 \cdot 4$; б) $503 \cdot 8$; в) $(400 - 50) \cdot 2$; г) $(200 + 3) \cdot 7$.

- а) $845 \cdot 25 \cdot 4 = 845 \cdot (25 \cdot 4) = 845 \cdot 100 = 84\,500$;
 б) $503 \cdot 8 = (500 + 3) \cdot 8 = 500 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 4000 + 24 = 4024$;
 в) $(400 - 50) \cdot 2 = 400 \cdot 2 - 50 \cdot 2 = 800 - 100 = 700$;
 г) $(200 + 3) \cdot 7 = 200 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 1300 + 21 = 1421$.

Пример 1.6. Найдем произведение чисел: а) 386 и 14; б) 435 и 106; в) 650 и 150.

$$\begin{array}{r} \text{а) } \times 386 \\ 14 \\ \hline + 1444 \\ 386 \\ \hline 5304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \times 435 \\ 106 \\ \hline + 2610 \\ 435 \\ \hline 46110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \times 650 \\ 150 \\ \hline + 325 \\ 65 \\ \hline 97500 \end{array}$$

Степень с натуральным показателем

По определению: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, n > 1$;

$$a^1 = a.$$

Степень: a^n , где a — основание степени, n — показатель степени.

Пример 1.7. Запишем произведение в виде степени: а) $4 \cdot 4$; б) $4 \cdot 4 \cdot 4$; в) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; г) $(a+b) \cdot (a+b)$.

- а) $4 \cdot 4 = 4^2$ (читается: «четыре в квадрате» или «четыре во второй степени»);
 б) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ (читается: «четыре в кубе» или «четыре в третьей степени»);
 в) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ (читается: «четыре в пятой степени»);
 г) $(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2$ (читается: « a плюс b в квадрате» или « a плюс b во второй степени»).

Пример 1.8. Найдем значение степени: а) 2^5 ; б) 40^2 ; в) 0^6 ; г) 1^3 .

- а) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$;
 б) $40^2 = 40 \cdot 40 = 1600$; в) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;
 г) $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Пример 1.9. Используя определение произведения n -й степени, упростим выражения: а) $a + a + a + a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; б) $x \cdot x \cdot x + x + x + x + x + x$; в) $a + a + a + a + x \cdot x \cdot x \cdot x$.

- а) $a + a + a + a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = 3a + a^5$;
 б) $x \cdot x \cdot x + x + x + x + x + x = x^3 + 5x$;
 в) $a + a + a + a + x \cdot x \cdot x \cdot x = 4a + x^4$.

Деление. Свойства деления

Частное: $a : b = c$, $b \neq 0$, где a — делимое; b — делитель; c — значение частного.

Деление — действие, обратное умножению: $a : b = c$, если $c \cdot b = a$.

В частности:

$$a : a = 1, a \neq 0;$$

$$a : 1 = a;$$

$$0 : a = 0, a \neq 0.$$

Деление — действие, при котором по заданным делимому и делителю находят значение частного.

Пример 1.10. Найдем частное чисел: а) 3941 и 563; б) 2454 и 409; в) 27 036 и 3004; г) 18 590 и 11.

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} 3941 \overline{) 7} \\ \underline{-35} \\ 44 \\ \underline{-42} \\ 21 \\ \underline{-21} \\ 0 \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} 2454 \overline{) 6} \\ \underline{-24} \\ 05 \\ \underline{-0} \\ 54 \\ \underline{-54} \\ 0 \end{array} \quad \text{в) } \begin{array}{r} 27036 \overline{) 9} \\ \underline{-27} \\ 00 \\ \underline{-0} \\ 03 \\ \underline{-0} \\ 36 \\ \underline{-36} \\ 0 \end{array} \quad \text{г) } \begin{array}{r} 18590 \overline{) 11} \\ \underline{-11} \\ 75 \\ \underline{-66} \\ 99 \\ \underline{-99} \\ 00 \\ \underline{-00} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Свойства деления:

а) деление суммы на число: $(a + b) : c = a : c + b : c$;

б) деление разности на число: $(a - b) : c = a : c - b : c$;

в) деление произведения на число: $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$.

Пример 1.11. Вычислим частные, используя свойства деления:
 а) $(49 + 42) : 7$; б) $(390 - 26) : 13$; в) $(24 \cdot 35) : 12$; г) $(15 \cdot 36) : 9$.

$$\text{а) } (49 + 42) : 7 = 49 : 7 + 42 : 7 = 7 + 6 = 13;$$

$$\text{б) } (390 - 26) : 13 = 390 : 13 - 26 : 13 = 30 - 2 = 28;$$

$$\text{в) } (24 \cdot 35) : 12 = (24 : 12) \cdot 35 = 2 \cdot 35 = 70;$$

$$\text{г) } (15 \cdot 36) : 9 = 15 \cdot (36 : 9) = 15 \cdot 4 = 60.$$

1.1.3. Наименьшее общее кратное. Наибольший общий делитель

Натуральное число, которое делится на данное число без остатка, называют *кратным* данному числу. Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных ему чисел.

Например, число 32 является кратным числу 8, так как 32 делится без остатка на 8. Числа 8, 16, 24, 40, 48,.. также кратны числу 8. Число 82 кратно числу 41, так как делится без остатка на 41. Числа 123, 164, 205... также кратны числу 41.

Натуральное число, на которое делится без остатка данное натуральное число, называют *делителем* данного числа.

Например, число 2 является делителем числа 32, так как 32 делится на 2 без остатка. Запишем все делители числа 32: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Число 41 является делителем числа 123, так как 123 делится на 41 без остатка. Запишем все делители числа 123: 1, 3, 41, 123.

Простым числом называют натуральное число, которое имеет только два делителя: единицу и само себя.

Простыми числами являются, например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Составным числом называют натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Числа 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 — составные.

Число 1 не считают ни простым, ни составным, так как оно имеет лишь один делитель — само себя.

Всякое составное число можно единственным образом (с точностью до порядка расположения множителей) разложить на простые множители, т.е. представить его в виде произведения простых чисел. Для того чтобы натуральное число разложить на простые множители, его необходимо последовательно делить на простые числа, начиная с 2, до тех пор, пока частным не станет 1.

Пример 1.12. Разложим на простые множители: а) 76; б) 270.



$$\begin{array}{r|l} \text{а) } 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом: $76 = 2 \cdot 2 \cdot 19 = 2^2 \cdot 19$.

$$\begin{array}{r|l} \text{б) } 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом: $270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$.



Пример 1.13. Разложим числа 30 и 45 на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Для натуральных чисел 30 и 45 числа 1, 3, 5 и 15 являются *общими делителями*, так как 30 и 45 делятся на 1, 3, 5 и 15 без остатка. *Наибольшим общим делителем* (НОД) чисел 30 и 45 является число 15. Это записывают следующим образом: $\text{НОД}(30, 45) = 15$.

Сформулируем далее *правило нахождения НОД*.

Для того чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, нужно:

- 1) разложить данные числа на простые множители;
- 2) составить произведение тех их множителей, которые входят во все разложения;
- 3) найти значение составленного произведения.

Пример 1.14. Найдем НОД чисел 30, 60 и 90.

Для этого:

- 1) разложим данные натуральные числа на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array};$$

- 2) найдем те множители, которые входят во все разложения: 2, 3, 5;
- 3) вычислив их произведение, получим:
 $\text{НОД}(30, 60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Два натуральных числа называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих простых множителей, отличных от 1.

Пример 1.15. Выясним, являются ли числа 30 и 119 взаимно простыми.

1. Разложим данные натуральные числа на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 119 & 7 \\ 17 & 7 \\ 1 & \end{array}.$$

2. Поскольку числа 30 и 119 не имеют общих делителей, отличных от 1, то это значит, что они являются взаимно простыми.

Сформулируем далее *правило нахождения наименьшего общего кратного* (НОК) нескольких чисел:

Для того чтобы найти наименьшее общее кратное (НОК) нескольких натуральных чисел, нужно:

- 1) разложить данные числа на простые множители;
- 2) записать разложение наибольшего числа и дополнить его теми множителями из разложений других чисел, которые не вошли в указанное разложение;
- 3) найти значение составленного произведения.

Пример 1.16. Найдем НОК чисел 30 и 238.



1. Разложим данные натуральные числа на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 238 & 2 \\ 119 & 7 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \cdot$$

2. Запишем разложение наибольшего из указанных чисел (то есть числа 238), затем, дополнив его недостающими множителями 3 и 5, получим: $\underbrace{2 \cdot 7 \cdot 17}_{238} \cdot 3 \cdot 5$.

3. Вычислив значение составленного разложения, получим:

$$\text{НОК}(30, 238) = 2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 5 = 3570.$$



Пример 1.17. Найдем НОК чисел 30, 60 и 90.



1. Разложим данные натуральные числа на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \cdot$$

2. Запишем разложение наибольшего из указанных чисел (то есть числа 90), затем дополним его недостающим множителем 2 (число 2 входит в разложение числа 90 один раз, а в разложение числа 60 — два раза):

$$\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}_{90} \cdot 2.$$

3. Вычислив значение составленного разложения, получим:

$$\text{НОК}(30, 60, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 180.$$

